

Evidências sobre a utilidade não pertencer à família CRRA: expandindo-a por polinômios de Legendre

Eduardo HORTA

PPGE/UFRGS

Rodrigo DE SÁ

PPGE/UFRGS e FEE

Anna MEIRA

PPGE/UFRGS

Raphael ORNELLAS

PPGE/UFRGS

Resumo

O trabalho tem como objetivo analisar se o uso recorrente de funções de utilidade com coeficiente de aversão relativa ao risco (CRRA) constante em pesquisas de finanças aplicadas é condizente com os dados. De certa forma, levantamos a hipótese que o grau de aversão relativa ao risco do indivíduo possui relação distinta com os níveis diferentes de sua renda (consumo). Assim sendo, utilizamos polinômios ortogonais para expandir a função de utilidade do agente a partir de dados da economia brasileira e, fazendo uso do modelo desenvolvido por Lucas [11], encontramos evidências que sinalizam que a aversão relativa ao risco varia com a renda do indivíduo.

Palavras-chave: Polinômios de Legendre; CCAPM; Função de utilidade; Estimação não-paramétrica; Brasil.

Abstract: In this paper, we analyze whether the recurrent usage of CRRA utility functions in applied finance is supported by empirical evidence. We assume that the coefficient of relative risk aversion depends on consumption. Thus, into the context of Lucas' model, we use an orthogonal polynomial functional basis in order to expand the utility function of a representative agent. Using Brazilian data, we find evidences which point towards a consumption-dependent coefficient of relative risk aversion.

Keywords: Legendre polynomials; CCAPM; Utility function; Non-parametric estimation; Brazil.

JEL Classification: C32, D01, G12.

Área 7 - Microeconomia, Métodos Quantitativos e Finanças

1 Introdução

A ênfase no problema de maximização intertemporal da utilidade dos agentes no tratamento de assuntos econômicos se inseriu no campo das Finanças por meio dos trabalhos de Rubinstein [14], Lucas [11] e Breeden [3]. Em seu artigo precursor, Lucas [11] examina o comportamento estocástico dos preços dos ativos em uma economia de trocas puras. Com a finalidade de aplicar o trabalho desenvolvido por Lucas, Mehra e Prescott [12] empregam uma variação do modelo proposto e calibram em seu trabalho os parâmetros de interesse, em particular o coeficiente de aversão relativa ao risco do agente representativo, por meio da metodologia de Kydland e Prescott [9]. Utilizando dados históricos da economia norte-americana, Mehra e Prescott [12] mostram que seria necessário um coeficiente de aversão relativa ao risco demasiadamente alto para que a grande disparidade observada entre os rendimentos do mercado acionário e dos títulos da dívida pública da economia dos EUA fosse reproduzida pelo modelo de Lucas. Este achado foi batizado pelos autores de *equity premium puzzle*.

Vários de artigos foram publicados nos anos subseqüentes à publicação do artigo de Mehra e Prescott [12], com o intuito de solucionar o *puzzle*. Weil [15] utiliza uma função de utilidade Kreps-Porteus caracterizada por uma elasticidade de substituição intertemporal constante e um coeficiente de aversão ao risco também constante. Constantinides [4] propõe a utilização de uma função de utilidade na forma *habit formation* para o agente representativo, de modo que consumo passado de alguma forma interfira na utilidade presente. Bernatzi e Thaler [1] introduzem duas novas características comportamentais para o agente representativo: assumem que os investidores são “avessos à perda”, no sentido que eles são mais sensíveis à perda que ao ganho, e que avaliam suas carteiras de investimento frequentemente, mesmo as de longo prazo. Para a economia brasileira, os trabalhos de Bonomo e Rodrigues[2], Pessoa, Bonomo e Garcia [13], Domingues[?] e de Cysne[6] merecem destaque.

Temos que todos os trabalhos citados até o momento assumem uma forma exata para a função utilidade do agente representativo. Em nosso trabalho, todavia, não iremos restringir a forma funcional da utilidade do agente. Portanto, o objetivo é estimar a forma funcional da utilidade expandindo-a por polinômios de Legendre, em um modelo como proposto por Lucas [11]. Assim, deixaremos que os dados nos digam, primordialmente, a forma da utilidade do agente, para então calcularmos o coeficiente relativo de aversão ao risco do mesmo.

2 Modelo

A estrutura do modelo e seus objetos serão apresentados a seguir. Seja um conjunto $\mathcal{T} \subset \mathbb{N}$ enumerável uma indexação temporal e $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ um espaço de probabilidade filtrado, onde Ω é o espaço amostral, \mathcal{F}_t é definido por uma função $\mathcal{F} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A})$, \mathcal{A} uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω , tal que $t > s \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, e onde $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ é uma probabilidade em \mathcal{A} . Sejam, ainda, $\ell^\infty = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}; \sup |x_n| < \infty\}$ o conjunto das seqüências limitadas, e $\mathcal{S} = \{X; X : \Omega \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}; (\omega, t) \mapsto X(\omega, t) \equiv X_t; (X(\omega, t))_{t \in \mathcal{T}} \in \ell^\infty\}$ o conjunto dos processos estocásticos limitados. Tem-se $\forall t \in \mathcal{T}, \forall X \in \mathcal{S}, \exists \mu_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que $\mu_X(H) = P(X^{-1}(H, t))$, onde $X^{-1}(H, t) = \{\omega \in \Omega; X(\omega, t) \in H\} \in \mathcal{F}_t$, isto é, a cada t , X é variável aleatória \mathcal{F}_t mensurável.

No ambiente acima exposto, sejam c_t o consumo per capita e $B_t \geq B_{min}$ o pagamento bruto sobre títulos do governo, pagável em $t + 1$, cujo valor presente é $R_t^{-1}B_t$, e em que R_t^{-1} é a taxa de retorno livre de risco. Sejam ainda $N_t \geq N_{min}$ a quantidade de ações em posse do agente representativo - a ser definido a seguir - P_t o preço de uma ação a menos dos dividendos, e y_t o fluxo de dividendos em t . A princípio - e por generalidade - podemos considerar essas variáveis como processos estocásticos, i.e., $c, B, N, R, P, y \in \mathcal{S}$.

Consideremos um agente representativo caracterizado por uma função de utilidade instantânea $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto u(a)$, com $u'(a) > 0$ e $u''(a) < 0$. Temos $u \circ c \in \mathcal{S}, (\omega, t) \mapsto u(c_t)$. Sua *utilidade presente descontada ao tempo* $t_0 \in \mathcal{T}$ é o funcional $\mathcal{U} : \mathcal{S} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ caracterizado por

$$\mathcal{U}(c, t_0) = \sum_{t=t_0}^{\infty} \beta^{t-t_0} u(c_t),$$

onde $\beta \in (0, 1)$. O agente representativo escolhe c^*, B^* e N^* tais que $(c_t^*)_{t=t_0}^{\infty}, (B_t^*)_{t=t_0}^{\infty}$ e $(N_t^*)_{t=t_0}^{\infty}$ maximizam $E_{t_0} \mathcal{U}(c, t_0)$, sujeito à restrição orçamentária $c_t + R_t^{-1}B_t + P_t N_t \leq A_t$ e à equação de transição $A_t = B_{t-1} + (P_t + y_t) N_{t-1}, \forall t \geq t_0$, com N_{t_0-1} e B_{t_0-1} dados, e onde A_t é o estoque de ativos em t .

Por não-saciedade, a restrição orçamentária valerá com o sinal de igualdade, de forma que $c_t + R_t^{-1}B_t + P_t N_t = B_{t-1} + (P_t + y_t) N_{t-1}, \forall t \geq t_0$. Se

c^* , B^* e N^* solucionam

$$\begin{aligned} & \max_{\{c,B,N,\lambda\}} \mathcal{L}(c, B, N, \lambda) = \\ & = E_{t_0} \left\{ \sum_{t=t_0}^{\infty} \beta^{t-t_0} u(c_t) + \lambda_t \left(B_{t-1} + (P_t + y_t) N_{t-1} - c_t - R_t^{-1} B_t - P_t N_t \right) \right\}, \end{aligned}$$

então, das condições de primeira ordem, temos $\frac{\partial \mathcal{L}(c^*, B, N)}{\partial c_t} = \frac{\partial \mathcal{L}(c, B^*, N)}{\partial B_t} = \frac{\partial \mathcal{L}(c, B, N^*)}{\partial N_t} = 0$, $\forall t \geq t_0$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} E_{t_0} \left\{ \beta^{t-t_0} u'(c_t^*) - \lambda_t \right\} &= 0, \\ E_{t_0} \left\{ \lambda_{t+1} - \lambda_t R_t^{-1} \right\} &= 0, \\ E_{t_0} \left\{ \lambda_{t+1} (P_{t+1} + y_{t+1}) - \lambda_t P_t \right\} &= 0, \end{aligned}$$

$\forall t \geq t_0$. Definindo $R_{t+1}^e \equiv \frac{(P_{t+1} + y_{t+1})}{P_t}$, omitindo os asteriscos, e usando a lei das expectativas iteradas, chegamos às equações de Euler,

$$R_t = \frac{u'(c_t)}{\beta E_t u'(c_{t+1})}, \quad (1)$$

$$E_t R_{t+1}^e = \frac{u'(c_t)}{\beta E_t u'(c_{t+1})}. \quad (2)$$

Suponhamos que os dividendos evoluam segundo $y_t = x_t y_{t-1}$, onde x_t é a taxa estocástica de crescimento, a qual segue um processo AR(1) da forma $x_t = \rho x_{t-1} + w_t$, com $w_t \sim ii\mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$. Isto implica em $x_{t+1} | I_t \sim \mathcal{N}(\rho x_t, \sigma_x^2)$, onde I_t é o conjunto de informação em t . No estado estacionário tem-se, obviamente¹, $c_t^* = y_t$. A equação (2) pode ser reescrita como

$$E_t R_{t+1}^e = \frac{u'(c_t)}{\beta g(x_t, c_t)} \quad (3)$$

onde $g(x_t, c_t) = \int_{\mathbb{R}} u'(sc_t) f(\rho_0 + \rho_1 x_t, \sigma_\eta^2) ds$ e $f(\mu, \sigma^2)$ é a função densidade de probabilidade de uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 . De (3) tem-se, conseqüentemente,

$$R_{t+1}^e = \frac{u'(x_t c_{t-1})}{\beta g(x_t, c_t)} + \varepsilon_{t+1}, \quad (4)$$

onde ε_t é um ruído branco com variância σ_ε^2 .

¹Ver, por exemplo, Ljungqvist e Sargent[10].

3 A criação de uma utilidade genérica

Usualmente, estima-se o modelo descrito acima supondo que a função utilidade seja da família CRRA, na forma $U(c) = c^{\gamma-1}(\gamma-1)^{-1}$. Uma propriedade dessa função é que o coeficiente de aversão relativa ao risco é constante e igual a γ . Porém, pode-se ser mais genérico quanto à forma da função utilidade. Desta forma, nesta seção será construída a representação genérica de uma função de utilidade..

Hipótese 1. *Existe uma função contínua e estritamente crescente e côncava $U \in \mathbf{L}^2(0,1)$ que ordena as cestas de consumo do agente representativo², onde $\mathbf{L}^2(0,1)$ é o espaço (de Hilbert³) das funções $f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f é mensurável em $(0,1)$ e $\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$.*

A Hipótese (1) diz que a função utilidade atende às condições necessárias à maximização do problema proposto por Lucas [11] e, por pertencer a um espaço de Hilbert, permite que usemos teoremas válidos nesses espaços na nossa análise.

Os passos a seguir visam a mostrar que essa função utilidade genérica pode ser aproximada por uma soma de polinômios ortogonais.

Definição 1. *Um subconjunto \mathcal{E} de um espaço \mathcal{H} de Hilbert é dito ortonormal se: (a) $\|e\| = 1, \forall e \in \mathcal{E}$; (b) $e \perp e', \forall e, e' \in \mathcal{E}$. Diz-se que \mathcal{E} é uma base, ou um conjunto ortonormal maximal, de \mathcal{H} , se $s \perp e, \forall e \in \mathcal{E} \Rightarrow s \in \mathcal{E}$.⁴*

Teorema 1. *Seja $\mathcal{E} = \{e_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma base de um espaço \mathcal{H} de Hilbert. Então para todo $x \in \mathcal{H}, x = \sum_{\mathcal{I}} \langle x, e_i \rangle e_i$.*

Demonstração. Ver Conway [5, proposição 4.7, p. 15]. □

Este teorema diz que cada elemento do espaço de Hilbert pode ser escrito como uma soma, possivelmente infinita, de projeções ortogonais nas direções dos componentes da base.

²Aqui, como há apenas um bem, ela compara as cestas de consumo de diferentes instantes do tempo.

³ $\mathbf{L}^2(0,1)$ é um espaço de Hilbert, isto é, é um espaço com produto interno completo na sua norma associada. No caso, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ e $\|f\| = \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

⁴Se todos elementos não tiverem norma igual a um, então basta dividi-los por suas respectivas normas.

Teorema 2. *Seja \mathcal{E} uma base de um espaço \mathcal{H} de Hilbert. Então, $\langle x, e \rangle \neq 0$ para no máximo um número enumerável de vetores em \mathcal{E} . Isto é, para cada $x \in \mathcal{H}$, existirá um conjunto enumerável $F_x = \{f_1, f_2, \dots\} \subset \mathcal{E}$, de forma que*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, f_i \rangle f_i. \quad (5)$$

Demonstração. Ver Conway [5, corolário 4.9, p. 15]. □

Assim, é possível descrever qualquer elemento de \mathcal{H} como uma soma enumerável de projeções ortogonais na direção de elementos da base desse espaço.

Definição 2. *Os polinômios definidos por*

$$P_n(x) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ (2^n n!)^{-1} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n & n \geq 1 \end{cases}$$

são chamados de polinômios de Legendre.

Teorema 3. *A seqüência (P_n) de polinômios de Legendre é uma base do $L^2(-1, 1)$.*

Demonstração. Ver Haaser e Sullivan [8, teorema 8.3, p. 305]. □

Os polinômios originais são definidos em $(-1, 1)$, contudo, com a transformação $x \mapsto 2x - 1$, pode-se fazer com que o seu domínio seja o $(0, 1)$, como se quer aqui. Os novos polinômios transladados a este último domínio são dados por $\tilde{P}_n(x) = P_n(2x - 1)$. Para ilustrar, os primeiros polinômios são

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0(x) &= 1 \\ \tilde{P}_1(x) &= 2x - 1 \\ \tilde{P}_2(x) &= 6x^2 - 6x + 1 \\ \tilde{P}_3(x) &= 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1. \end{aligned}$$

O teorema (3) permite que escrevamos a nossa função utilidade genérica como uma soma de polinômios de Legendre, já que eles expandem o espaço

das funções na qual ela está contida. Então a verdadeira função utilidade pode ser escrita como⁵

$$U(c) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \tilde{P}_i(c), \quad \alpha_i = \langle U, \tilde{P}_i \rangle \|\tilde{P}_i\|,$$

onde os \tilde{P}_i são os polinômios de Legendre transladados ao $(0, 1)$. Dado que essa soma infinita converge para $U(c)$, podemos aproximá-la por

$$U(c) \simeq u(c) = \sum_{i=0}^N \alpha_i \tilde{P}_i(c). \quad (6)$$

Como os problemas de maximização são indiferentes a transformações afins⁶ nas funções objetivos, (6) pode ser simplificada de duas formas: (a) pode-se subtrair o polinômio constante P_0 ; (b) pode-se dividir a função por $|\alpha_1|$, de forma que podemos reescrevê-la como

$$u(c) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{P}_i(c), \quad \alpha_{i \neq 1} \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha_1 \in \{-1, 0, 1\}. \quad (7)$$

É esta função $u(c)$, dada por a soma dos polinômios de Legendre, que será usada na estimação.

4 Dados

Os dados utilizadas no trabalho tem periodicidade trimestral e se situam no intervalo de janeiro de 1996 a dezembro de 2009. A série do consumo do agente representativo a ser usada no modelo deve ser condizente com seu consumo de bens não-duráveis e serviços. Na ausência de tal série de dados, foi construída uma que engloba o Produto Interno Bruto (PIB) da agricultura, subtraída a parte exportada e somada a parte importada, o PIB da industria de produção e distribuição de eletricidade, gás e água e o PIB do setor de serviços. Todas as séries foram calculadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) e remete à produção física.

Com a obtenção dos dados e a formação de uma nova série, esta foi dividida pela série da população residente do Brasil, calculada pelo IBGE.

⁵Na equação a seguir, $\alpha_i = \langle U, \tilde{P}_i \rangle \|\tilde{P}_i\|$ vem da equação (5) e do fato de os polinômios de Legendre não terem norma igual a um, então a base ortonormal é $\left\{ \tilde{P}_i (\|\tilde{P}_i\|)^{-1} \right\}_{i=0}^{\infty}$.

⁶Transformações da forma $x \mapsto Ax + b$.

Como a série da população residente é disponível apenas em periodicidade anual, a sua transformação para trimestral foi feita através de interpolação geométrica. Após estas transformações, obtivemos a série de consumo do agente representativo utilizada no trabalho. A série de crescimento dos dividendos, que no equilíbrio é o próprio consumo, foi construída simplesmente dividindo o consumo em $t + 1$ pelo consumo em t .

O índice Ibovespa de ações foi utilizado para representar o ativo singular da economia. Todas as séries utilizadas estão deflacionadas pelo Índice de Preço ao Consumidor Amplo (IPCA) e dessazonalizadas.

São apresentados, a seguir, os gráficos das séries utilizadas no trabalho. No Gráfico 1, temos o gráfico do índice de consumo per capita de bens não-duráveis utilizado no trabalho, no Gráfico 2, o crescimento do consumo per capita e no Gráfico 3, o retorno do Ibovespa.

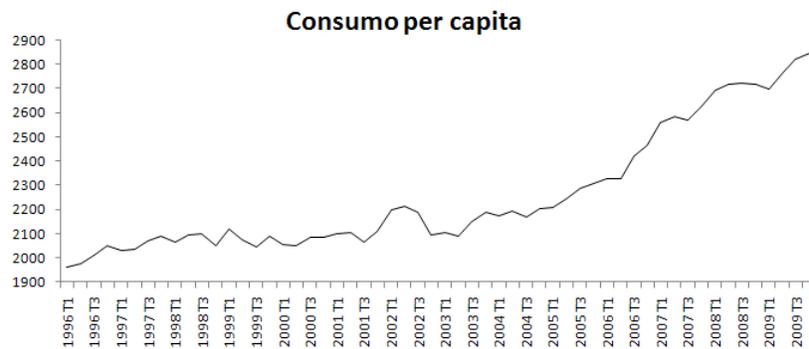


Gráfico1 - Consumo per capita de bens não-duráveis

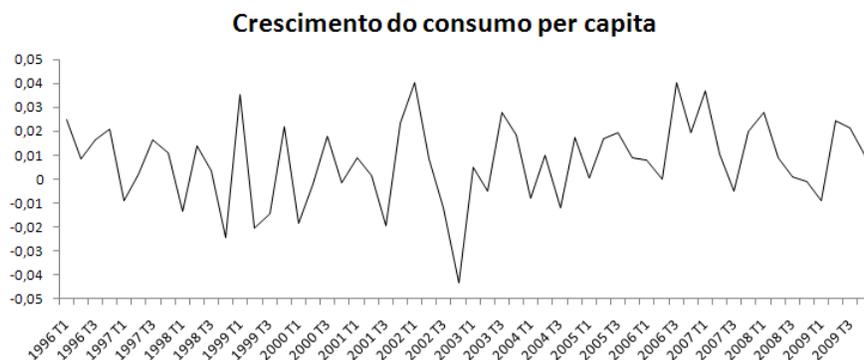


Gráfico 2 - Crescimento do consumo per capita de bens não-duráveis



Gráfico 3 - Retorno do Ibovespa

Abaixo, algumas estatísticas amostrais das séries utilizadas, onde (1) é o consumo per capita de bens não duráveis, (2) é o crescimento do consumo per capita dos bens não-duráveis e (3) é o retorno do Ibovespa:

Estatística	(1)	(2)	(3)
Média	2256.9266	0.0072768	0.0414515
Mediana	2159.0566	0.0089890	0.0339741
Máximo	2847.1074	0.0403155	0.3243164
Mínimo	1959.7408	-0.0435939	-0.2464895
Desvio padrão	253.20788	0.0171793	0.1389711
Observações	56	56	56

Tabela 1 - Estatísticas amostrais

Utilizamos uma aproximação para a função de utilidade do agente por meio de funções ortogonais. Aqui, nos detivemos aos polinômios de Legendre para tal aproximação, sendo que estes polinômios têm como domínio o intervalo $(0, 1)$. Assim sendo, tivemos que mapear os valores encontrados para o consumo do agente para dentro deste intervalo. O mapeamento foi feito utilizando a função $m : [0, \infty) \rightarrow (0, 1)$ definida por $m(c) = -e^{-wc} + 1$, onde w foi escolhido de forma a maximizar⁷ a variância do consumo no novo

⁷O objetivo de maximizar a variância é resultar em valores transformados de consumo

mapa. Vale notar que o consumo não pode assumir valores negativos.

5 Estimação

A equação (4), com U assumindo a forma dada em (7), pode ser vista como uma regressão não linear de R_{t+1} contra c_t e x_t , e pode ser resolvida pelo método da máxima verossimilhança. Este método⁸ consiste em achar o conjunto de parâmetros que maximiza a probabilidade (densidade) conjunta da série de dados obtida (R).

Seja $\theta = (\alpha_2, \dots, \alpha_6, \beta, \rho_0, \rho_1, \sigma_\eta)'$ o vetor com os parâmetros a serem estimados. Pode-se representar a regressão não-linear na forma matricial da seguinte forma:

1. Seja r o vetor (Tx1) com elementos da forma $r_i = R_{t+1}^e$, onde T é o tamanho da amostra, já ajustado para o fato das variáveis não serem contemporâneas;
2. Seja $h(\theta)$ o vetor (Tx1) com elementos $h_i(\theta) = \frac{u'(c_t)}{\beta g(x_t, c_t)}$ e;
3. Seja ϵ o vetor (Tx1) com elemento $\epsilon_i = \epsilon_{t+1}$.

Então, a regressão (4) fica $r = f(Z, \theta) + \epsilon$.

Supondo que os erros sejam independentes e identicamente distribuídos com distribuição normal, $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$, então a densidade de ϵ_i é $f(\epsilon_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{\epsilon_i^2}{2\sigma^2}\right)$. Como $\epsilon_i = r_i - h_i(\theta)$, a densidade de r_i é

$$f(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{(r_i - h_i(\theta))^2}{2\sigma^2}\right). \quad (8)$$

A função de verossimilhança é $L(r, \theta, \sigma) = \prod_{i=1}^T f(r_i)$ e a de logverossimilhança é $l(r, \theta, \sigma) = \sum_{i=1}^T \ln f(r_i)$. Dada (8), tem-se

$$l(r, \theta, \sigma) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^T (r_i - h_i(\theta))^2, \quad (9)$$

$$= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} (r - h(\theta))' (r - h(\theta)). \quad (10)$$

o mais longe possível um do outro de forma a reduzir o esforço computacional na varredura dos grides no cômputo da quase-máxima verossimilhança.

⁸O método exposto segue Davidson e MacKinnon [7].

Uma alternativa para maximizar $l(r, \theta, \sigma)$ é primeiro concentrá-la em relação a σ . Derivando (10) e igualando a zero fica-se com

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(r, \theta, \sigma)}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} (r - h(\theta))' (r - h(\theta)) = 0 \Rightarrow \\ \sigma(\theta) &= \left((r - h(\theta))' (r - h(\theta)) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Substituindo (11) em (10) tem-se a verossimilhança concentrada,

$$\begin{aligned} l^c(r, \theta) &= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \left((r - h(\theta))' (r - h(\theta)) \right) - \frac{n}{2}, \\ &= C - \frac{n}{2} \ln \left((r - h(\theta))' (r - h(\theta)) \right), \end{aligned}$$

onde C é uma constante que não depende de θ . A verossimilhança pode ainda ser concentrada em relação a β . A condição de primeira ordem fica

$$\frac{\partial l^c}{\partial \beta} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sum_{i=1}^T (r_i - h_i)^2} \sum_{i=1}^T 2(r_i - h_i) \left(-\frac{\partial h_i}{\partial \beta} \right) = 0. \quad (12)$$

Para que a equação (12) valha, é necessário que $\sum_i \partial h_i / \partial \beta (r_i - h_i) = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T -\frac{U'(c_t)}{\beta^2 g(x_t, c_t)} r_{t+1} &= \sum_{t=1}^T \frac{1}{\beta^3} \left(\frac{U'(c_t)}{g(x_t, c_t)} \right)^2 \Rightarrow \\ \beta(\alpha_2, \dots, \alpha_6) &= \left(\sum_{t=1}^T \left(\frac{U'(c_t)}{g(x_t, c_t)} \right)^2 \right) \left(\sum_{t=1}^T r_{t+1} \left(\frac{U'(c_t)}{g(x_t, c_t)} \right) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

O estimador de máxima verossimilhança de $\{\alpha_2, \dots, \alpha_6\}$ é dado, então, por

$$\{\hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_6\} = \arg \max_{\{\alpha\}} \left[-\frac{n}{2} \ln \left((r - h(\theta))' (r - h(\theta)) \right) \right],$$

valendo (13).

A maximização foi feita por busca em uma grade dos α 's que atendiam as restrições impostas à função utilidade (crescente e côncava).⁹ As estimativas encontradas estão na Tabela 2 a seguir.

⁹Na primeira grade o espaçamento utilizado foi 0.02. Na segunda, ao redor do primeiro máximo, usou-se um espaçamento de 0.0025.

Parâmetro	Estimativa
α_2	-0.9450
α_3	0.5900
α_4	-0.2375
α_5	0.0450
α_6	0.0000
β	0.9686

Tabela 2 - Parâmetros Estimados

6 Resultados e Conclusão

Uma vez estimado os parâmetros, calculamos a forma da utilidade e o coeficiente de aversão relativa ao risco. A utilidade está exposta no Gráfico 4, e o coeficiente de aversão relativa ao risco está exposto no Gráfico 5 que se seguem:

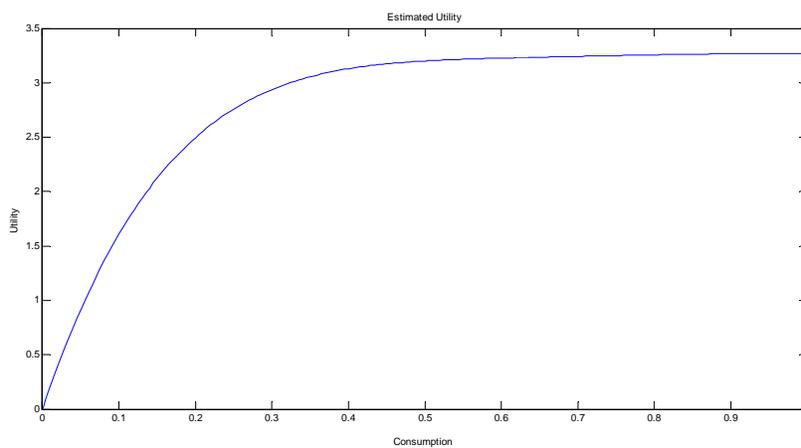


Gráfico 4 - Utilidade Estimada

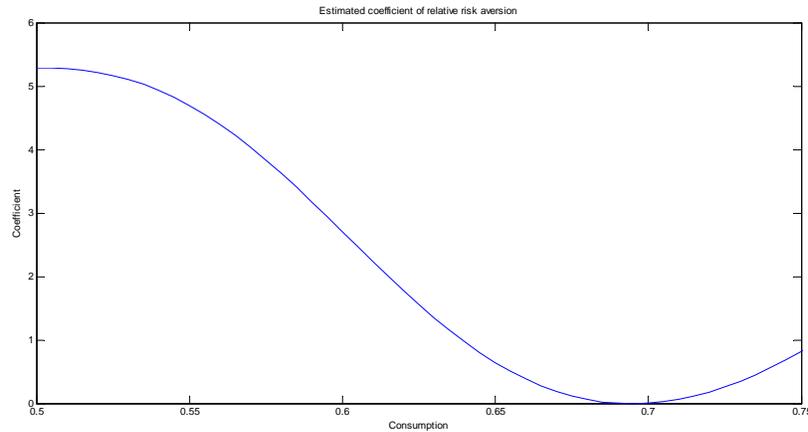


Gráfico 5 - Coeficiente de aversão relativa ao risco

De acordo com o Gráfico 6, a função utilidade que podemos inferir a partir dos dados, no intervalo do dados obtidos, nos sugere que a utilidade dos agentes que melhor se adequa ao caso não é do tipo que possui o coeficiente de aversão relativa ao risco (CRRA) constante, como amplamente usado em trabalhos que buscam estimar os retornos pelo modelo CCAPM ou mesmo avaliar o *equity premium puzzle*.

Ainda, encontramos indícios de que o coeficiente de aversão relativa ao risco é maior para níveis menor de consumo, decaindo com o aumento do consumo. Desta forma, leva a crer que famílias com menor poder aquisitivo estão menos propensas a tomar risco.

Assim, no trabalho não restringimos a forma funcional da utilidade dos agentes no problema de precificação de ativos por maximização intertemporal da utilidade de um agente representativo. Ao contrário de trabalhos existentes, utilizamos polinômios ortogonais para relatar, como função dos dados, como o nível de consumo afeta a aversão ao risco do agente. Como conclusão, encontramos evidências que não corroboram com a forma funcional da função de utilidade que é amplamente utilizada em trabalhos de finanças aplicadas.

Referências

- [1] S. Benartzi and R.H. Thaler, *Myopic loss aversion and the equity premium puzzle*, The Quarterly Journal of Economics **110** (1995), no. 1,

- 73–92. 1
- [2] M. Bonomo and G.B. Domingues, *Os puzzles invertidos no mercado brasileiro de ativos*, Finanças aplicadas ao Brasil. Rio de Janeiro: Fundação Getulio Vargas (2002), 105–120. 1
- [3] D.T. Breeden, *An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities*, Journal of Financial Economics **7** (1979), no. 3, 265–296. 1
- [4] G. Constantinides, *Habit formation: A resolution of the equity premium puzzle*, Journal of Political Economy **98** (1990), 519–543. 1
- [5] J.B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer, 1990. 3, 3
- [6] R.P. Cysne, *Equity-premium puzzle: evidence from Brazilian data*, Economia Aplicada **10** (2006), 161–180. 1
- [7] R. Davidson and J.G. MacKinnon, *Estimation and inference in econometrics*, Oxford: Oxford University Press, 1993. 8
- [8] N.B. Haaser and J.A. Sullivan, *Real analysis*, Dover Pubns, 1991. 3
- [9] E. Kydland, F. Prescott, *Time to build and aggregate fluctuations*, Econometrica **50** (1982), 1345–1370. 1
- [10] T. Ljungqvist, L. Sargent, *Recursive macroeconomic theory*, The MIT Press, 2004. 1
- [11] R. Lucas, *Asset prices in an exchange economy*, Econometrica **46** (1978), 1429–1445. (document), 1, 3
- [12] E. Mehra, R. Prescott, *The equity premium: A puzzle*, Journal of Monetary Economics **15** (1985), 145–161. 1
- [13] M. Pessoa, M. Bonomo, and R. Garcia, *Reproduzindo os momentos dos retornos dos ativos brasileiros com aversão a desapontamento generalizada*, Anais do 7o Encontro Brasileiro de Finanças, Sao Paulo (2007). 1
- [14] M. Rubinstein, *The valuation of uncertain income streams and the pricing of options*, The Bell Journal of Economics **7** (1976), no. 2, 407–425. 1

- [15] P. Weil, *The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle*, Journal of Monetary Economics **24** (1989), no. 3, 401–421. 1