



EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2017

PROVA DE MATEMÁTICA

**2º Dia: 29/09/2016 – QUINTA-FEIRA
HORÁRIO: 8h00m às 10h15m (horário de Brasília)**

Instruções

1. Este **CADERNO** é constituído de **quinze** questões objetivas.
2. Caso o **CADERNO** esteja incompleto ou tenha qualquer defeito, o(a) candidato(a) deverá solicitar ao fiscal de sala mais próximo que o substitua.
3. Nas questões do tipo A, recomenda-se não marcar ao acaso: cada item cuja resposta divirja do gabarito oficial acarretará a perda de $\frac{1}{n}$ ponto, em que n é o número de itens da questão a que pertença o item, conforme consta no Manual do Candidato.
4. Durante as provas, o(a) candidato(a) não deverá levantar-se ou comunicar-se com outros(as) candidatos(as).
5. A duração da prova é de **duas horas e quinze minutos**, já incluído o tempo destinado à identificação – que será feita no decorrer das provas –, e ao preenchimento da **FOLHA DE RESPOSTAS**.
6. Durante a realização das provas **não** é permitida a utilização de calculadora ou qualquer material de consulta.
7. A desobediência a qualquer uma das recomendações constantes nas presentes Instruções e na **FOLHA DE RESPOSTAS** poderá implicar a anulação das provas do(a) candidato(a).
8. Só será permitida a saída de candidatos, levando o Caderno de Provas, **somente a partir de 1 hora e 15 minutos após o início da prova** e nenhuma folha pode ser destacada.

AGENDA

- **03/10/2016 – 10 horas** – Divulgação dos **gabaritos** das provas objetivas, no endereço: <http://www.anpec.org.br>.
- **03/10 a 04/10/2016** – Recursos identificados pelo autor serão aceitos até às 12h do dia 04/10 do corrente ano. Não serão aceitos recursos fora do padrão apresentado no Manual do Candidato.
- **03/11/2016 – 14 horas** – Divulgação do **resultado** na Internet, no *site* acima citado.

OBSERVAÇÕES:

- Em nenhuma hipótese a ANPEC informará resultado por telefone.
- É **proibida** a reprodução total ou parcial deste material, por qualquer meio ou processo, sem autorização expressa da ANPEC.
- Nas questões de **1 a 15 (não numéricas)** marque, de acordo com a instrução de cada uma delas: itens **VERDADEIROS** na coluna **V**; itens **FALSOS** na coluna **F**, ou deixe a resposta **EM BRANCO**.
- Caso a **resposta seja numérica**, marque o dígito **DECIMAL** na coluna **D** e o dígito da **UNIDADE** na coluna **U**, ou deixe a resposta **EM BRANCO**.
- Atenção: o algarismo das **DEZENAS** deve ser obrigatoriamente marcado, mesmo que seja igual a **ZERO**.

QUESTÃO 01

Considere o seguinte conjunto: $C = \{(x, y) : x^2 - 2x - 1 \leq y \leq \min\{x + 17, -x + 19\}\}$. Analise a veracidade das seguintes afirmações:

- Ⓒ O valor máximo da coordenada horizontal de C é 19;
- Ⓐ O valor mínimo da coordenada horizontal de C é -3;
- Ⓑ O valor máximo da coordenada vertical de C é 15;
- Ⓓ O valor mínimo da coordenada vertical de C é -2;
- Ⓔ A interseção de C com o eixo vertical determina um segmento de comprimento 18.

QUESTÃO 02

Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é chamada idempotente se $M^2 = M$. Uma matriz $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é chamada nilpotente se existe um número inteiro positivo k tal que $N^k = 0$ (matriz com todas as entradas nulas). Classifique as seguintes afirmações segundo a sua veracidade:

- ⊙ O determinante de uma matriz nilpotente é zero;
- ① Se $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é nilpotente, então existe um número inteiro r tal que $(I - M)^{-1} = I + M + \cdots + M^r$;
- ② A soma de matrizes nilpotentes é uma matriz nilpotente;
- ③ O determinante de uma matriz idempotente é sempre 1;
- ④ A matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é idempotente se, e somente se, $(I - M)$ é idempotente.

QUESTÃO 03

Considere a seguinte equação em diferenças: $y_{t+3} - y_{t+2} - y_{t+1} - 2y_t = 3t - 3$. Se temos as seguintes condições iniciais: $y_0 = 3$, $y_1 = 2$ e $y_2 = -5$, classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

- Ⓒ A solução da equação homogênea associada é explosiva;
- ① A solução particular é uma função quadrática em t ;
- ② Em $t = 30$ temos que $y_{30} = -27$;
- ③ A solução da equação homogênea associada é uma combinação linear de potências de números reais que têm valores absolutos maiores ou menores que 1;
- ④ A solução é oscilante entorno de uma função linear.

QUESTÃO 04

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

- ⊙ Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Se T é injetora, então T também é sobrejetora;
- ① Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x,y) = (2x - 5y, x - 2y)$. Então existe um subespaço unidimensional V de \mathbb{R}^2 tal que $TV \subset V$;
- ② Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear tal que as colunas da matriz que a representa são linearmente independentes. Então o posto de T é m ;
- ③ Sob as mesmas condições do item anterior, podemos afirmar que existe um vetor $v \neq 0$ tal que $Tv = 0$;
- ④ Sejam $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas transformações lineares. Então todo autovalor de TG é também um autovalor de GT , em que TG e GT são as duas compostas das transformações T e G .

QUESTÃO 05

Considere o conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x - y + 2 \geq 0, x^2 + 2x + y - 2 \leq 0, x^2 - 2x - 4y - 3 \leq 0\}$. O objetivo é maximizar a função $f(x, y) = ax + by$, em que $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$ no conjunto C . Quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas?

- Ⓒ O conjunto C contém $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 4\}$;
- Ⓐ Se $a = 3$ e $b = 1$, então a solução é $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$;
- Ⓑ Para qualquer $(a, b) \neq (0, 0)$, a solução está na fronteira de C ;
- Ⓓ Se $a = -1$ e $b = -2$, então a solução é $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$;
- Ⓔ Se $a = -2$ e $b = 1$, então o valor máximo de $f(x, y)$ em C é 3.

QUESTÃO 06

Considere o sistema em $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -10y - x^3 - x^5$.

Encontre $\frac{1}{-y^2} \frac{d}{dt} F(x(t), y(t))$, em que $x(t), y(t)$ é a solução do sistema acima e

$$F(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6}.$$

QUESTÃO 07

Considere a seguinte função: $f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 220x^3 + 270x^2 + 1080x - 56$. Analise o valor de verdade das seguintes afirmações:

- Ⓒ $x = -3$ é um máximo relativo;
- Ⓐ Para $x \geq 3$ a função f é côncava;
- Ⓑ Existem três pontos de inflexão;
- Ⓓ Quando $x \rightarrow +\infty$, o valor de $f(x) \rightarrow -\infty$;
- Ⓔ No intervalo $[-3, 2]$ existe um mínimo absoluto interior.

QUESTÃO 08

Dada a função $f(x, y) = x^2 \ln y + y^3 e^x + 3x + 2y$, quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas?

- Ⓒ No ponto $(x, y) = (1, 1)$ a direção $(-3, 1)$ é uma direção de crescimento da função f ;
- Ⓐ No ponto $(x, y) = (0, 1)$ a direção $(4, 5)$ é a direção de máximo incremento da função f ;
- Ⓑ A função f tem um máximo relativo interior no seu domínio;
- Ⓓ Ao longo do eixo vertical (quando $x = 0$) a direção horizontal à direita (ou seja, $(1, 0)$) é a direção de máximo incremento de f ;
- Ⓔ Em todo ponto do domínio a função f é crescente em ambas variáveis.

QUESTÃO 09

Um contrato financeiro especifica a seguinte aplicação de taxas de juros. Durante os t_1 primeiros meses (primeiro período) deve se pagar uma taxa de juros simples de r_1 ao mês (ou seja, $100r_1\%$ ao mês). Durante os t_2 meses seguintes (segundo período) deve se pagar uma taxa de juros composta de r_2 ao mês (com capitalização mensal). Finalmente, durante os últimos t_3 meses (terceiro período) deve se pagar uma taxa de juros de capitalização contínua de r_3 ao mês. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas?

- Ⓒ A taxa de juros nos dois primeiros períodos é $(1 + t_1 r_1)(1 + r_2)^{t_2} - 1$;
- ① Se no primeiro período colocarmos uma taxa de juros mensal de capitalização contínua equivalente, o seu valor será $(1 + t_1 r_1)^{\frac{1}{t_1}} - 1$;
- ② Se no terceiro período colocarmos uma taxa de juros simples mensal equivalente, o seu valor será $t_3^{-1} e^{t_3 r_3}$;
- ③ A taxa de juros desse contrato para os três períodos é $t_1 r_1 + r_2^{t_2} + e^{t_3 r_3}$;
- ④ A taxa de juros mensal com capitalização contínua equivalente para todos os três períodos é $(t_1 + t_2 + t_3)^{-1} [t_3 r_3 + t_2 \ln(1 + r_2) + \ln(1 + t_1 r_1)]$.

QUESTÃO 10

Uma bactéria está disseminando-se rapidamente, de maneira que a velocidade de propagação segue a equação $\dot{p} = Ap(1-p)$, em que $p = p(t) \in [0,1]$ é a percentagem da população contaminada após $t \geq 0$ dias, $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$ e $A > 0$ é uma constante. Analisar a veracidade das seguintes afirmações:

- Ⓒ A função p é uma função logarítmica;
- ① Se inicialmente havia 1% da população infectada e depois de 4 dias 10% da população mostrou-se contaminada, então $A = \frac{1}{4} \ln(11)$;
- ② O tempo necessário para a bactéria duplicar a população inicialmente infectada é $A^{-1} \ln 2$;
- ③ Se inicialmente havia 10% de infectados, o instante da maior velocidade de propagação da bactéria é $2A^{-1} \ln 3$;
- ④ Existe um valor de $A > 0$ para o qual a máxima percentagem da população que resulta infectada é 50%.

QUESTÃO 11

Analise a veracidade das seguintes afirmações:

- ⊙ Para que as retas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sejam perpendiculares deve-se cumprir $a_1a_2 + b_1b_2 = 1$;
- ① Para que as retas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ se interceptem em um único ponto deve-se cumprir $a_1b_2 \neq a_2b_1$;
- ② Ao girar o vetor $(4, 2\sqrt{3})$ de um ângulo de 60° em sentido anti-horário resulta o vetor $(3\sqrt{3}, -1)$;
- ③ A reta definida pelas equações $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ e $-x + 2y - 3z + 4 = 0$ é perpendicular ao plano dado por $-17x + 2y + 7z + 10 = 0$;
- ④ Para que a reta que passa por $(-1, -1)$ e tenha direção dada pelo vetor $(1, b)$ seja tangente à parábola $y = x^2$, o valor de b pode ser 0,82 ou $-4,82$ (usando apenas duas casas decimais).

QUESTÃO 12

No seguinte problema de maximização:

$$\max_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} \left(x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} \right)^a - x_1 - x_2.$$

É correto afirmar:

- Ⓒ Se $a \in (0,1)$, a função objetivo desse problema é estritamente convexa;
- Ⓐ Se $a = 1$, o valor máximo atingido no problema é $\frac{1}{2}$;
- Ⓑ Se $a = 1,5$, $(x_1, x_2) = \left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$ é ponto crítico da função objetivo do problema;
- Ⓓ Se $a = 2$, o problema não tem solução;
- Ⓔ Se $a = 3$, a solução do problema é $(x_1, x_2) = (36, 36)$.

QUESTÃO 13

Analisar a veracidade das seguintes afirmações:

- ⊙ Se $f: B \rightarrow C$ e $g: A \rightarrow B$ são duas funções injetoras, então $(f \circ g)^{-1}$ definida em $D = \{z \in C : \exists x \in A \text{ tal que } f(g(x)) = z\}$ é uma função sobrejetora;
- ① Se $f: B \rightarrow C$ e $g: A \rightarrow B$ são duas funções tais que $f \circ g$ é bijetora, então g é sobrejetora e f é injetora;
- ② Se $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ definida em $\mathbb{R} - \{1\}$, então $f^{-1}(x) = f(x)$;
- ③ Se $f: B \rightarrow C$ é sobrejetora e $g: A \rightarrow B$ é injetora, então $f \circ g$ é sobrejetora;
- ④ Seja $f: [0,16] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$. O valor máximo do contradomínio de $f^{(5)}(x)$ é 2, em que $f^{(5)}(x) = (f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x)$.

QUESTÃO 14

Sabendo que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, defina

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 + (2y-x)^2 + 2y^2)} dx dy.$$

Calcule $\frac{8\sqrt{2}}{\pi} I$.

QUESTÃO 15

Calcular o valor de a em que:

$$a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}(n+2)}{n^2+n}.$$

RASCUNHO



ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE CENTROS DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
- 2017 -

LOCAL DO EXAME:

DATA/HORÁRIO DO EXAME:

INSCRIÇÃO:

NOME:

INSTRUÇÕES PARA PREENCHIMENTO:

- USE SOMENTE CANETA ESFEROGRÁFICA PRETA PARA MARCAR SUA RESPOSTA.
- LEIA ATENTAMENTE AS INSTRUÇÕES NO CADERNO DE PROVA.
- PREENCHA OS ALVÉOLOS CORRETAMENTE CONFORME EXEMPLO INDICADO A SEGUIR:



ASSINATURA:

RG / ÓRGÃO:

PROVA

1 2 3 4 5 6

4 - MATEMÁTICA

LEGENDA

V - Verdadeiro D - Dezena
F - Falso U - Unidade

ORIENTAÇÕES:

- Questões do tipo V / F : assinale V, se verdadeiro; F, se falso; ou deixe em branco (sem marcas).
- Questões numéricas : marque o algarismo da dezena na coluna (D) - mesmo que seja 0 (zero), e o das unidades na coluna (U). Você pode também deixar a questão em branco, sem resposta.

CUIDADO:

O candidato que deixar toda a prova sem resposta (em branco) será desclassificado.

- 01 -			- 02 -			- 03 -			- 04 -			- 05 -		
V	F		V	F		V	F		V	F		V	F	
0-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
1-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

- 06 -			- 07 -			- 08 -			- 09 -			- 10 -		
	D	U	V	F		V	F		V	F		V	F	
0-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
1-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>												
6-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>												
7-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>												
8-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>												
9-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>												

- 11 -			- 12 -			- 13 -			- 14 -			- 15 -		
V	F		V	F		V	F			D	U		D	U
0-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
1-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
									5-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	5-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
									6-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	6-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
									7-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	7-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
									8-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	8-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
									9-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	9-	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>