anpec
associação nacional de
centros de pós graduação
em economia

EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2007

PROVA DE MATEMÁTICA

2º Dia: 19/10/2006 - QUINTA FEIRA
HORÁRIO: 8h às 10h 15 (horário de Brasília)

anpec associação nacional de centros de pós graduação em economia	**EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2007**
	2º Dia: 19/10 (Quinta-feira) – Manhã: 8h às 10h 15 - MATEMÁTICA

Instruções

1. Este **CADERNO** é constituído de **quinze** questões objetivas.
2. Caso o **CADERNO** esteja incompleto ou tenha qualquer defeito, o(a) candidato(a) deverá solicitar ao fiscal de sala mais próximo que o substitua.
3. Nas questões do tipo A, recomenda-se não marcar ao acaso: cada item cuja resposta divirja do gabarito oficial acarretará a perda de $\frac{1}{n}$ ponto, em que n é o número de itens da questão a que pertença o item, conforme consta no Manual do Candidato.
4. Durante as provas, o(a) candidato(a) não deverá levantar-se ou comunicar-se com outros(as) candidatos(as).
5. A duração da prova é de **duas horas e quinze minutos**, já incluído o tempo destinado à identificação – que será feita no decorrer das provas – e ao preenchimento da **FOLHA DE RESPOSTAS**.
6. Durante a realização das provas **não** é permitida a utilização de calculadora ou qualquer material de consulta.
7. A desobediência a qualquer uma das recomendações constantes nas presentes Instruções, na **FOLHA DE RASCUNHO** e na **FOLHA DE RESPOSTAS** poderá implicar a anulação das provas do(a) candidato(a).
8. Só será permitida a saída de candidatos, levando o Caderno de Provas, **a partir de 1 hora e 15 minutos após o início da prova** e nenhuma folha pode ser destacada.

AGENDA

- **26/10/2006** – A partir das 20h, divulgação dos **gabaritos** das provas objetivas, nos endereços: http://www.unb.br/face/eco/anpec2007 e http://www.anpec.org.br
- **26 a 28/10/2006** – Recursos identificados pelo autor serão aceitos a partir do dia 26 até às 20h do dia 28/10 do corrente ano. Não serão aceitos recursos fora do padrão apresentado no Manual do Candidato.
- **16/11/2006** – Entrega do **resultado** da parte objetiva do Exame aos Centros.
- **17/11/2006** – Divulgação do **resultado** pela Internet, nos *sites* acima citados.
- **24/11/2006 –** Início do envio da confirmação de aceite pelos candidatos.
- **27/11/2006 –** Último dia para os candidatos confirmarem se aceitam ou não o Centro para o qual foram convidados.

OBSERVAÇÕES:

- Em nenhuma hipótese a ANPEC informará resultado por telefone.
-

anpec — associação nacional de centros de pós graduação em economia	**EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2007**
	2º Dia: 19/10 (Quinta-feira) – Manhã: 8h às 10h 15 - MATEMÁTICA

- Nas questões de **1** a **11**, marque, de acordo como o comando de cada uma delas: itens **VERDADEIROS** na coluna **V**; itens **FALSOS** na coluna **F**.
- Nas questões **12** a **15**, marque, de acordo com o comando: o algarismo das **DEZENAS** na coluna **D**; o algarismo das **UNIDADES** na coluna **U**. O algarismo das **DEZENAS** deve ser obrigatoriamente marcado, mesmo que seja igual a **ZERO**.
- Use a **FOLHA DE RASCUNHO** para as devidas marcações e, posteriormente, a **FOLHA DE RESPOSTAS**.

QUESTÃO 01

Seja *A* a matriz, na base canônica, do operador linear $L: R^3 \to R^3$ dado por $L(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z)$. Denote por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ os autovalores da matriz *A*. Julgue os itens abaixo:

⓪ O posto de *A* é 2.

① $L(1,-2,1) = (0,0,0)$.

② $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$.

③ $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 15$.

④ *L* é diagonalizável.

QUESTÃO 02

Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

em que *a, b, c* são constantes. Julgue os itens abaixo:

⓪ O traço de *A* é $tr(A) = a + b + c + 6$.

① O determinante de *A* é $det(A) = 6$.

② Se *a, b, c* são constantes negativas, a matriz *A'A* é definida negativa.

③ A matriz *A'A* é simétrica.

④ Se $a = b = c = 0$, a matriz *A'A* é definida positiva.

QUESTÃO 03

Seja $\langle , \rangle$ o produto escalar usual de R^{n+1} e $V = V_1 \wedge \ldots \wedge V_n \in R^{n+1}$ o produto vetorial de vetores linearmente independentes $V_1,...,V_n \in R^{n+1}$. Por definição $\langle V, W \rangle = \det A_W$, em que

$$A_W = \begin{pmatrix} W \\ V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

é a matriz cujas linhas são os vetores $W, V_1,...,V_n \in R^{n+1}$. Julgue os itens abaixo:

⓪ $\langle V, V_i \rangle = 0$, para todo $i \in \{1,...,n\}$.

① $\det A_V \neq |V|^2$.

② $V \neq 0$.

③ $\det(A_V A_V{}^t) = |V|^2 \det(g_{ij})$, em que $g_{ij} = \langle V_i, V_j \rangle$.

④ $|V| = \sqrt{\det(g_{ij})}$.

QUESTÃO 04

Considere as funções:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x \geq 0 \\ -x^2, & se\ x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x\ , & se\ x > 1 \\ x^3, & se\ x \leq 1 \end{cases}$$

Com relação aos conceitos de continuidade e diferenciabilidade, julgue os itens abaixo:

⓪ A função *f* é contínua em *x = 0*.

① A derivada de *f* não é contínua em *x = 0*.

② A função *g* é diferenciável em *x = 1*.

③ A segunda derivada de *f* é diferenciável em *x = 0*.

④ A função *h*, definida por *h(x)* = |*f(x)*| não é diferenciável em *x = 0*.

QUESTÃO 05

Seja $f : U \to R$ uma função duas vezes diferenciavel, definida em $U = \{(x, y) : x, y > 0\}$ e $H_f(x, y)$ a matriz Hessiana de f no ponto $(x, y) \in U$. Avalie as afirmativas:

⓪ A função f é convexa se e somente se $H_f(x, y)$ é semidefinida positiva em todos os pontos de U.

① Se $f(x, y) = -x^{1/3} y^{1/4}$, então f é convexa.

② Se f é convexa, então $H_f(x, y)$ é positiva definida em todos os pontos de U.

③ Se $f(x,y)=x^2y^2$, então f é convexa.

④ Se f é convexa e (x_0,y_0) é um ponto crítico de f, então $f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$, para todo $(x,y)\in U$.

QUESTÃO 06

Seja $x: N\to R$ a seqüência dada por $x(n)=x_n=1/n$ e seja $s_n=x_1+\cdots+x_n$. Julgue os itens abaixo:

⓪ $x_k<x_{2n}$, para algum $k\leq 2n$.

① $s_{2n}-s_n=x_{n+1}+x_{n+2}\cdots+x_{2n}\geq nx_{2n}\geq 1/2$.

② $\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n}<1$.

③ A série $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\ 2}$ é divergente.

④ A série $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ é convergente.

QUESTÃO 07

Seja $f: R\to R$ a função dada implicitamente por $tg[f(x)]=x$. Sabendo-se que $f(R)=(-\pi/2,\pi/2)$, julgue os itens abaixo:

⓪ f não é uma função diferenciável.

① O Teorema da Função Implícita nos garante que f é uma função diferenciável e $f'(x)=1/(1+x^2)$.

② $\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=1-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=1-f(1)+f(0)$.

③ $\int_0^1\ln(1+x^2)\,dx=\ln 2+\pi/2$.

④ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=2\pi$.

QUESTÃO 08

Sejam $I=(0,\infty)$ e $F,f: I\to R$ funções definidas por $F(x)=e^{x\ln x}$ e $f(x)=x^x(1+\ln x)$. Julgue os itens abaixo:

⓪ A função $F: I\to R$ não é uma primitiva de f.

① $\int_1^2 f(x)\,dx=3$.

② Se $A=\int_1^2 f(x)\cos^2 x dx$ e $B=\int_1^2 f(x) sen^2 x dx$, então $A+B=4$.

③ Se $\int_1^2 [f(x)/F(x)]dx = 2\ln(2)$.

④ $f(1)\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ é igual ao comprimento de um círculo de raio $r=1$.

QUESTÃO 09

A expressão ln(x) denota o logaritmo natural de x. Julgue os itens abaixo:

⓪ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln(2)}{x}\right)^x = 2$.

① $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\ln(2)]^n}{n!} = 2$.

② $\lim_{x\to\infty} \ln\left\{\sqrt[4]{\left(1+\frac{4}{x}\right)^x}\right\} = 2\ln(2)$.

③ $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[k\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n}{n!} = 2$.

④ $\frac{d}{dy}\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{y\ln(2)}{x}\right)^{-x}\right\} = -[\ln(2)]\exp\{-y\ln(2)\}$.

QUESTÃO 10

Sejam $Q \subset R$ o conjunto dos números racionais e $g: R \to R$ a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x \in Q \\ 81 & se \quad x \notin Q \end{cases}$$

em que $f: R \to R$ é a função dada por $f(x) = (x^2-9)^2$. Julgue os itens abaixo:

⓪ g é contínua em apenas três pontos: $-3\sqrt{2}$, 0, $3\sqrt{2}$.

① g é descontínua em todos os pontos $x \in R$.

② f é convexa no intervalo $(0,\infty)$.

③ $f(x) \geq f(3) = f(-3)$, para todo $x \in R$.

④ f é uma função crescente no intervalo $[0,3]$ e no ponto $x=0$, f possui um máximo local.

QUESTÃO 11

Julgue os itens abaixo:

⓪ Se *f(x,y)* é uma função homogênea de grau 2, então a função $h(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} / \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ é homogênea de grau 1.

① Se *f(x,y)* é uma função homogênea de grau 1 e duas vezes continuamente diferenciável tal que $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$ em todo ponto do domínio, então $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 0$ sempre que $x \neq 0$.

② Se *f(x,y)* é uma função homogênea de grau 0, então ela é constante.

③ Se *f(x,y)* é uma função linear, então ela é homogênea de grau 1.

④ Se *f(x,y)* é homogênea de grau zero, então o gradiente de *f* em qualquer ponto *(x,y)* é ortogonal ao vetor *(x,y)*.

QUESTÃO 12

Sejam $f_1, f_2, f_3 : R \to R$ funções diferenciáveis tais que $f_1(0) = -\sqrt{3}$, $f_2(0) = 0$ e $f_3(0) = \sqrt{3}$. Suponha ainda que para todo $x \in R$,

$$F(x, f_1(x)) = F(x, f_2(x)) = F(x, f_3(x)) = 0,$$

em que $F : R^2 \to R$ é a função dada por $F(x, y) = y^3 - 3y - sen(x)$. Se $\alpha = f_1'(0) f_2'(0) f_3'(0)$, calcule o valor de $m = |18 + 1/\alpha|$.

QUESTÃO 13

Seja $f : R \to R$ uma função três vezes diferenciável tal que $f(0) = 2$ e $f'(x) = x^2 f(x) - 3x^2$, para todo $x \in R$. Calcule $\alpha = 5 - f'''(0)$.

QUESTÃO 14

Neste problema, todas as variáveis são não-negativas. Considere o problema de maximização:

$$\begin{cases} \max & x^2 y^2 z^4 \\ s.a & 2x + y + 5z = 40 \end{cases}$$

Se (x^*, y^*, z^*) é a solução, calcule $x^* + y^* + z^*$.

QUESTÃO 15

Seja $\langle , \rangle$ o produto escalar usual de R^n e $f : R^n_{++} \to R^n$ a função diferenciável dada por $f(x_1, ..., x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$. Calcule $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ sabendo-se que para todo $X \in R^n_{++}$, $\langle \nabla f(X), X \rangle = 2^3 f(X)$.