anpec
associação nacional de
centros de pós graduação
em economia

EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2009

PROVA DE MATEMÁTICA

2º Dia: 09/10/2009 - QUINTA FEIRA
HORÁRIO: 8h às 10h 15 (horário de Brasília)

anpec associação nacional de centros de pós graduação em economia	**EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2009**
	2º Dia: 09/10 (Quinta-feira) – Manhã: 8h às 10h 15 - MATEMÁTICA

Instruções

1. Este **CADERNO** é constituído de **quinze** questões objetivas.

2. Caso o **CADERNO** esteja incompleto ou tenha qualquer defeito, o(a) candidato(a) deverá solicitar ao fiscal de sala mais próximo que o substitua.

3. Nas questões do tipo A, recomenda-se não marcar ao acaso: cada item cuja resposta divirja do gabarito oficial acarretará a perda de $\frac{1}{n}$ ponto, em que *n* é o número de itens da questão a que pertença o item, conforme consta no Manual do Candidato.

4. Durante as provas, o(a) candidato(a) não deverá levantar-se ou comunicar-se com outros(as) candidatos(as).

5. A duração da prova é de **duas horas e quinze minutos**, já incluído o tempo destinado à identificação – que será feita no decorrer das provas – e ao preenchimento da **FOLHA DE RESPOSTAS**.

6. Durante a realização das provas **não** é permitida a utilização de calculadora ou qualquer material de consulta.

7. A desobediência a qualquer uma das recomendações constantes nas presentes Instruções, na **FOLHA DE RASCUNHO** e na **FOLHA DE RESPOSTAS** poderá implicar a anulação das provas do(a) candidato(a).

8. Só será permitida a saída de candidatos, levando o Caderno de Provas, **somente a partir de 1 hora e 15 minutos após o início da prova** e nenhuma folha pode ser destacada.

AGENDA

- **17/10/2008** – Divulgação dos **gabaritos** das provas objetivas, no endereço: **http://www.anpec.org.br/**
- **17 a 18/10/2008** – Recursos identificados pelo autor serão aceitos a partir do dia 17 até às 20h do dia 18/10 do corrente ano. Não serão aceitos recursos fora do padrão apresentado no manual do candidato.
- **06/11/2008** – Entrega do **resultado** da parte objetiva do Exame aos Centros.
- **07/11/2008** – Divulgação do **resultado** pela Internet, no *site* acima citado.

OBSERVAÇÕES:

- Em nenhuma hipótese a ANPEC informará resultado por telefone.
-

anpec associação nacional de centros de pós graduação em economia	**EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2009**
	2º Dia: 09/10 (Quinta-feira) – Manhã: 8h às 10h 15 - MATEMÁTICA

- Nas questões de **1** a **15,** marque, de acordo com o comando de cada uma delas: itens **VERDADEIROS** na coluna **V**; itens **FALSOS** na coluna **F**; respostas **EM BRANCO** na coluna X. *Caso a **resposta seja numérica***, marque o dígito **DECIMAL** na coluna D e o dígito da **UNIDADE** na coluna U, ou marque XX para respostas **EM BRANCO**.
- Atenção: o algarismo das **DEZENAS** deve ser obrigatoriamente marcado, mesmo que seja igual a **ZERO**.
- Use a **FOLHA DE RASCUNHO** para as devidas marcações e, posteriormente, a **FOLHA DE RESPOSTAS**.

QUESTÃO 1

Seja $f: R \times R \to R$ definida por $f(x, y) = g(x)g(y)$, em que $g: R \to R$ é a função dada por $g(x) = x^2(2 - x)$. Seja $a = 4/3$ e $K = [0,2] \times [0,2]$. Julgue os itens abaixo:

(0) g é decrescente no intervalo $[0, a]$.

(1) $\nabla f(x,0) = \nabla f(0, y) = (0,0), \quad \forall x, y \in R.$

(2) p é ponto crítico de $f \Leftrightarrow p = (2,2)$ ou $p = (a, a)$.

(3) g é convexa no intervalo $(-\infty, a/2)$.

(4) $0 \leq f(x, y) \leq f(a, a), \ \forall (x, y) \in K.$

QUESTÃO 2

Considere as funções f: $R \to R$ e g: $R \to R$, em que

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1, & se \ \ x < 0, \\ 1, & se \ \ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = xe^x.$$

Julgue as afirmativas:

(0) f é contínua em 0, para todo $a \in R$.

(1) Se $a \neq 0$ então *f* não é derivável em 0.

(2) *g* é crescente em $(-1,\infty)$ e possui um máximo local em *x* = -1.

(3) *g* é uma função convexa.

(4) *g''(x) > g'(x),* para todo $x \in R$.

QUESTÃO 3

Se A é a matriz na base canônica de *T*: $R^3 \to R^3$, dada por *T(x,y,z)= (z, x-y, -z),* julgue as afirmativas:

(0) A dimensão do núcleo de T é 2.

(1) {(0,1,0),(1,0,-1)} é uma base da imagem de T.

(2) A transposta de A é $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(3) Se $U=\{(0,0,z)/z \in R\}$ então $T(U) \subseteq U$.

(4) $\{(x,y,z) \in R^3 / T(x,y,z) = (0,1,0)\}$ é uma reta no plano xy.

QUESTÃO 4

Considere a função *f*: $R_+^2 \to R$ definida por $f(x,y) = x^{3/4} y^{1/4}$, em que $R_+^2 = R_+ \times R_+$. Julgue as afirmativas:

(0) A função *f* é côncava.

(1) A função *f* possui um ponto de máximo absoluto em R_+^2.

(2) A partir do ponto (1,1), a função cresce mais rapidamente na direção do vetor $(3/4, 1/4)$.

(3) Se $u = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, então $\frac{\partial f}{\partial u}(1,1) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, em que $\frac{\partial f}{\partial u}(1,1)$ é a derivada direcional de *f*, no ponto *(1,1)*, na direção do vetor *u*.

(4) A função *f* é homogênea de grau 3.

QUESTÃO 5

Sejam $f : R^2 \to R$, dada por $f(x,y) = \min\{x+y, 3\}$ e $g : R^2 \to R$, dada por $g(x,y) = 2x+2y$

$U=\{(x,y) \in R_+^2 / x^2+y^2 \geq 9-2xy\}$. Avalie as afirmativas:

(0) A restrição de *f* a U é uma função constante.

(1) A curva de nível 0 de *f* é uma reta que passa por (0,3).

(2) $g(1,2) \leq g(x,y)$, para todo $(x,y) \in U$.

(3) Max $f(x,y)$ sujeito a $g(x,y) = 4$ é 3.

(4) Max $g(x,y)$ sujeito a $f(x,y) = -1$ é -2.

QUESTÃO 6

Denote por M_n o espaço das matrizes $n \times n$ com entradas $a_{ij} \in R$. Seja $D : \mathrm{M}_2 \times \mathrm{M}_2 \to \mathrm{M}_4$ a aplicação dada por

$$D(X,Y) = \begin{pmatrix} X & \underline{0} \\ \underline{0} & Y \end{pmatrix},$$

em que $\underline{0} \in \mathrm{M}_2$ é identicamente nula. Seja A a matriz da aplicação linear $L : R^2 \to R^2$, dada por $L(x,y) = (y-x, y)$. Se $B = D(A,A)$, julgue as afirmativas:

(0) O polinômio característico de A é dado por $p(t) = -(1-t^2)$

(1) $A^{-1} = A$ e $\det A = \det B = 1$.

(2) Se λ é um autovalor de A, então λ é um autovalor de B.

(3) O polinômio característico de B é dado por $q(t) = t^4 + 2t^2 + 1$.

(4) A é diagonalizável.

QUESTÃO 7

Seja $f : R \to R$ a função definida por $f(x) = -x^2 + 8x - 16$ e L o limite de uma seqüência (x_n) de números reais positivos tais que $x_1 = a$ e

$$x_{n+1}{}^2 - x_n{}^2 = f(x_n).$$

Avalie se cada afirmação abaixo é verdadeira (V) ou falsa (F):

(0) $f(L) \neq 0$.

(1) O gráfico de f é uma parábola com vértice $V = (L, 0)$.

(2) O gráfico de f é uma parábola com vértice $V = (0, L)$.

(3) $f \leq 0$ e $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq 0$.

(4) $a \geq x_n \geq L = 4$, para todo $n \geq 1$.

QUESTÃO 8

Seja a_n uma seqüência de números reais tais que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge ao tomarmos $x = 2$. Suponha ainda que o limite

$$L = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \infty$$

existe. Para cada $x \in R$, defina $b_n(x) = a_n x^n$ e avalie se cada afirmação abaixo é verdadeira (V) ou falsa (F):

(0) $\lim \left| \dfrac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)} \right| = L|x|$.

(1) $2L > 1$.

(2). $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge se $|x| < 2$.

(3) $\lim a_n = 1$.

(4) qualquer que seja $x \in R$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n / n!$ converge.

QUESTÃO 9

Seja $f, g : R^2 \to R$ funções diferenciáveis definidas por $f(x, y) = xy$ e $g(x, y) = x^4 + y^4$. Quando restrita ao conjunto não vazio

$$K_c = \{(x, y) \in R^2 : \ g(x, y) = c\},$$

a função f assume um valor máximo $V(c)$. Seja $\lambda = \lambda(c)$ o multiplicador de Lagrange introduzido para a determinação do máximo da restrição de f ao conjunto K_c. Julgue os itens abaixo:

(0) $\nabla g - \lambda \nabla f$, se anula no ponto de máximo de $f / K_c : K_c \to R$.

(1) $V(2r^2) = r,$ para todo $r > 0.$

(2) $\lambda(c) = V'(c).$

(3) $\lambda(c)V(c) = 1.$

(4) Se $c = 8,$ então $|f(x,y)| \leq 2,$ para todo $(x,y) \in K_c.$

QUESTÃO 10

Sejam $f : R^2 \to R$ e $F : R^2 \times R^+ \to R$ funções diferenciáveis tais que $f(1,2) = 1$ e $F(x,y,z) = z^2 f(x/z, y/z).$

Julgue os itens abaixo:

(0) $f(p) = F(p,1),$ para todo $p = (x,y) \in R^2.$

(1) $2F_x(2,4,2) + 4F_y(2,4,2) + 2F_z(2,4,2) = 4.$

(2) $U = R^2 \times R^+$ é um conjunto convexo.

(3) Se $f(x,y) = x^{1/2}y^{1/3},$ então f é convexa.

(4) $\langle \nabla F(X), X \rangle = 2F(X),$ para todo $X \in R^2 \times R.$

QUESTÃO 11

Sejam A = $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$. Julgue os itens abaixo:

(0) tr(A) = -detB então k=*1*.

(1) Se k = 1 então 0 é autovalor de A.

(2) Para todo k, v= $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k-1 \end{pmatrix}$ é autovetor de A associado ao autovalor k.

(3) Se $k \neq 0$ e $k \neq -1$ então o sistema A**x**=**b** tem solução única, em que **x** = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e

b = $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

(4) Se $k=0$ então o sistema B**x = 0**, em que **0** é o vetor nulo que só admite a solução trivial, isto é **x**=**0**.

QUESTÃO 12

Considere as seqüências (x_n) e (y_n) definidas por $x_n = \dfrac{n}{n!}$ e $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Julgue as afirmativas:

(0) y_n é monótona decrescente.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \infty$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

(3) A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ é convergente.

(4) A série $a^2 + \dfrac{a^2}{1+a^2} + \dfrac{a^2}{(1+a^2)^2} + \dfrac{a^2}{(1+a^2)^3} + \ldots$ é convergente, para todo $a \in R$.

QUESTÃO 13

Sejam $f, g : R^2 \to R$, dadas por $f(x, y) = xy + 5$ e $g(x, y) = x^2 + y^2$. Encontre o valor máximo de f restrita à $g(x, y) \leq 2$.

QUESTÃO 14

Seja $f : R \to R$ uma função duas vezes diferenciável, tal que $f(0) = f'(0) = 1$ e $f'' + 2f' + f = 0$. Se $A = \ln\left(\frac{f(4)}{9}\right)$, calcule o valor de $\alpha = \left[A \int_0^1 e^t f(t) dt \right]^2$.

QUESTÃO 15

Seja $f : R^3 \to R$ uma função C^∞ e homogênea de grau 3 tal que $f(1,1,1) = 3$. Se $p = (2,2,2)$, calcule o valor de $\alpha = \langle \nabla f\ (p), p \rangle$.
