



EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2010

PROVA DE MATEMÁTICA

2º Dia: 01/10/2009 - QUINTA FEIRA
HORÁRIO: 8h às 10h 15m (horário de Brasília)

Instruções

1. Este **CADERNO** é constituído de **quinze** questões objetivas.
2. Caso o **CADERNO** esteja incompleto ou tenha qualquer defeito, o(a) candidato(a) deverá solicitar ao fiscal de sala mais próximo que o substitua.
3. Nas questões do tipo A, recomenda-se não marcar ao acaso: cada item cuja resposta divirja do gabarito oficial acarretará a perda de $\frac{1}{n}$ ponto, em que n é o número de itens da questão a que pertença o item, conforme consta no Manual do Candidato.
4. Durante as provas, o(a) candidato(a) não deverá levantar-se ou comunicar-se com outros(as) candidatos(as).
5. A duração da prova é de **duas horas e quinze minutos**, já incluído o tempo destinado à identificação – que será feita no decorrer das provas – e ao preenchimento da **FOLHA DE RESPOSTAS**.
6. Durante a realização das provas **não** é permitida a utilização de calculadora ou qualquer material de consulta.
7. A desobediência a qualquer uma das recomendações constantes nas presentes Instruções e na **FOLHA DE RESPOSTAS** poderá implicar a anulação das provas do(a) candidato(a).
8. Só será permitida a saída de candidatos, levando o Caderno de Provas, **somente a partir de 1 hora e 15 minutos após o início da prova** e nenhuma folha pode ser destacada.

Agenda

- **05/10/2009** – Divulgação dos **gabaritos** das provas objetivas, no endereço: <http://www.anpec.org.br/>
- **05 a 06/10/2009** – Recursos identificados pelo autor serão aceitos a partir do dia 05 até às 20h do dia 06/10 do corrente ano. Não serão aceitos recursos fora do padrão apresentado no manual do candidato.
- **05/11/2009** – Entrega do **resultado** da parte objetiva do Exame aos Centros.
- **06/11/2009** – Divulgação do **resultado** pela Internet, no site acima citado.

OBSERVAÇÕES

- Em nenhuma hipótese a ANPEC informará resultado por telefone.
- É **proibida** a reprodução total ou parcial deste material, por qualquer meio ou processo, sem autorização expressa da ANPEC.
- Nas questões de **1 a 15 (não numéricas)** marque, de acordo com o comando de cada uma delas: itens **VERDADEIROS** na coluna **V**; itens **FALSOS** na coluna **F**; ou deixe a resposta em **BRANCO**. Caso a **resposta seja numérica**, marque o dígito **DECIMAL** na coluna D e o dígito da **UNIDADE** na coluna U, ou deixe a resposta **EM BRANCO**.
- Atenção: o algarismo das **DEZENAS** deve ser obrigatoriamente marcado, mesmo que seja igual a **ZERO**.

QUESTÃO 01

Considere os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} / |x-3| + |x-2| = 1\}; B = \{x \in \mathbb{R} / 3 + 2x - x^2 > 0\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / 1 < \frac{1}{x} < 2\} \text{ e } D = \{x \in \mathbb{R}_+ / 4 \leq x^2 \leq 9\}. \text{ Julgue as afirmativas:}$$

- Ⓐ A é um intervalo aberto;
- Ⓑ Se $X \subset A$ e $X \not\subset B$, então X é um conjunto unitário;
- Ⓒ $2 \in (A \cap C)$;
- Ⓓ $A = D$;
- Ⓔ $\{(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n+2}) / n \in \mathbb{N}^*\} \subset B \times C$.

QUESTÃO 02

Seja $f: R^2 \rightarrow R$ diferenciável e homogênea de grau 4, tal que $f(1,1)=2$. Julgue os itens abaixo:

- Ⓒ A soma das derivadas parciais de f no ponto $(2,2)$ é igual a 32;
- Ⓐ Em um ponto crítico (x_0, y_0) de f temos que $f(x_0, y_0)=0$;
- Ⓑ As derivadas parciais de primeira ordem de f são também funções homogêneas de grau 4;
- Ⓓ As identidades $\begin{cases} xf_{xx}(x, y) + yf_{yx}(x, y) = 3f_x(x, y) \\ xf_{xy}(x, y) + yf_{yy}(x, y) = 3f_y(x, y) \end{cases}$ são válidas para todo ponto $(x, y) \in R^2$;
- Ⓔ se $p=(x_0, y_0)$ e o gradiente de f em p são ortogonais, então $f(p)=0$.

QUESTÃO 03

Sejam $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x\sqrt{5-x^2}$. Julgue as afirmativas:

- Ⓒ $\int_1^e f(x)dx = \frac{1}{e}$;
- Ⓐ $\int \frac{x}{x^2+7} dx = \frac{f(x^2+7)}{2} + c$, em que c é uma constante arbitrária;
- Ⓑ A área delimitada pelo gráfico de g , o eixo x e as retas verticais $x = -1$ e $x = 2$ é $7/3$;
- Ⓓ $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}} = 2$;
- Ⓔ Se $\int_a^b h(x)dx > 0$, então $h(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$.

QUESTÃO 04

Julgue as afirmativas:

- Ⓒ Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\nabla f(x, y, z) = (2, 0, 0)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Então $f(x, y, z) = 2x$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
- ① Se $f(x, t) = e^{-c^2 t} \operatorname{sen}(cx)$, então $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ para todo real c ;
- ② Se $f(x, y) = \int_x^y e^{\cos t} dt$, então $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -e^{\cos x}$;
- ③ Se $z = f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = e^t$ e $y = e^{-t}$, então $\frac{dz}{dt} = 0$, para $t=0$;
- ④ $f(x, y) = 5x^{1/2}y^{3/2} - \frac{2x^3}{y}$ é homogênea de grau 2.

QUESTÃO 05

Sejam $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x + y$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = x^2 + y^2$ e $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = x^3 y^3 - x - y + 1$. Julgue as afirmativas:

- Ⓒ g possui ponto de máximo absoluto em \mathbb{R}^2 ;
- Ⓐ Os pontos críticos de f na restrição $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / g(x, y) = 1\}$ são $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
- Ⓑ g é uma função convexa em \mathbb{R}^2 ;
- Ⓓ A matriz hessiana de h é negativa definida em $(-1, 1)$;
- Ⓔ A equação $h(x, y) = 0$ define implicitamente y como função de x em torno do ponto $(1, 1)$, e $y'(1) = -1$.

QUESTÃO 06

Considere as funções definidas por

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1} \text{ e } g(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20. \text{ Julgue as afirmativas:}$$

- Ⓒ g atinge máximo relativo em $x = 2$ e mínimo relativo em $x = 4$;
- Ⓐ g é crescente em $[2, 4]$;
- Ⓑ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$;
- Ⓓ f tem 2 assíntotas verticais: $x = 1$ e $x = -1$;
- Ⓔ f tem um ponto crítico x que é ponto de máximo global, pois $f''(x) < 0$.

QUESTÃO 07

Seja $\Phi(x, y) = xy$ a função real definida no quadrante $A = \{(x, y) \mid x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$.

Julgue os itens abaixo:

- Ⓒ A declividade da reta tangente à curva $\Phi(x, y) = 1$ no ponto $(1, 1)$ é igual a -2 ;
- Ⓐ O valor absoluto da declividade da reta tangente à curva $\Phi(x, y) = 1$ no ponto $(a, 1/a)$ cresce à medida que a aumenta;
- Ⓑ O valor máximo do problema de otimização $\max_A \Phi(x, y)$, sujeito a condição $2x + 3y \leq 1$, é igual a $1/24$;
- Ⓓ O valor mínimo do problema de otimização $\min_A 4x + 9y$, sujeito a condição $\Phi(x, y) = 1$, é igual a $1/12$;
- Ⓔ Para cada $c > 0$, seja $V(c)$ a solução do problema de otimização $\max_A \Phi(x, y)$, sujeito a condição $2x + 3y \leq c$. Então V é derivável e $V'(2) = V(2)$.

QUESTÃO 08

Julgue as afirmativas:

- ⊙ Se $u = 2e_1 + e_2 - 2e_3$, então $v = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ é um vetor unitário, paralelo a u , em que $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$;
- ① Sejam $u = (x,1,0)$, $v = (-2,y,3)$ e $w = (y,-1,-1)$, tais que u é perpendicular a v e a w . Então $x^2 = 1/2$;
- ② Considere os pontos $P_1 = (x,1,0)$ e $P_2 = (-2,y,3)$. Se a distância de P_1 a P_2 é igual à distância de P_2 ao plano xy , então $x = 1$ e $y = -2$;
- ③ Seja (a,b) um ponto na interseção da circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1 com a reta $y = 2x$. Então $a^2 = 1/2$;
- ④ Seja r a reta tangente ao gráfico de $y = 2x^2 - 3x + 5$, no ponto $(1,4)$. A equação da reta perpendicular a r e que passa por $(-1,2)$ é $y = -x + 1$.

QUESTÃO 09

Considere os sistemas lineares abaixo e julgue as afirmativas:

$$(I) = \begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

$$(II) = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Ⓒ Se $k \neq 3$, então o sistema (I) tem solução única;
- Ⓐ Se $k = 0$, o sistema homogêneo associado a (I) tem infinitas soluções;
- Ⓑ Para $k = 1$, a matriz dos coeficientes de (I) é uma matriz ortogonal;
- Ⓓ Se $m > n$, (II) tem sempre solução;
- Ⓔ Se $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, então o sistema (II) tem sempre solução.

QUESTÃO 10

Julgue as afirmativas:

- Ⓒ $S = \{(x, y, x+y) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 e a dimensão de S é 2;
- Ⓐ $\{(1,2,3), (4,5,12), (0,8,0)\}$ é base de \mathbb{R}^3 ;
- Ⓑ Se u , v e w são vetores linearmente independentes, então $v+w$, $u+w$ e $u+v$ são também linearmente independentes;
- Ⓓ Se S é um subconjunto de \mathbb{R}^3 formado por vetores linearmente dependentes, então podemos afirmar que S tem 4 elementos ou mais;
- Ⓔ Se o posto da matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é 3, então $x \neq 1$.

QUESTÃO 11

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$.

Julgue as afirmativas:

Ⓒ Para $a = 1$ e $b = 2$, então $(3A - B^t)' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$;

Ⓐ Se -1 é autovalor de A , então $a = 0$;

Ⓑ Para $b = 2$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ é um autovetor de B ;

Ⓓ Se $a > -1/2$, então A é diagonalizável;

Ⓔ C é invertível não simétrica.

QUESTÃO 12

Considere as equações diferenciais abaixo e julgue as afirmativas:

(I) $y'' - 4y = 0$ (II) $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$ (III) $y'' - 2y' + y = 0$

Ⓒ (I), (II) e (III) são equações diferenciais lineares de segunda ordem;

Ⓐ $y = e^{-2x} + 2e^{2x}$ é solução de (I), para os valores de contorno $y(0) = 3$ e $y(\ln 3) = \frac{163}{9}$;

Ⓑ A solução da homogênea associada a (II) é $y_h = Ae^{-3x} + Be^{-4x}$, em que A e B são constantes arbitrárias;

Ⓓ $y_p = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$ é solução particular de (II);

Ⓔ A equação característica de (III) possui 2 raízes distintas.

QUESTÃO 13

Julgue as afirmativas:

- Ⓒ Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais não nulos, tal que $|a_{n+1}| < \frac{|a_n|}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;
- ① Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$;
- ② $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$ diverge;
- ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^2 2^n} = 0$;
- ④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n + 3}{n}$ é convergente.

QUESTÃO 14

Seja a_n uma sequência de números positivos e $S = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq 1\}$.
Julgue os itens abaixo:

- Ⓒ Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então S é finito;
- Ⓐ Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge;
- Ⓑ Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 / (1 + a_n^2)$ convergem;
- Ⓓ Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} / a_n|$ existe, então $R \leq 1$;
- Ⓔ A série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n / n!$ converge somente quando $|x| < 1$.

QUESTÃO 15

Considere o sistema de equações diferenciais abaixo.

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = -3x + y \end{cases}$$

Se $x(0) = 5$ e $y(0) = 0$, encontre $\frac{x'''(0)}{2}$.

LEGENDA

V - Verdadeiro

F - Falso

D - Dezena

U - Unidade

ORIENTAÇÕES:

- 1) Questões do tipo V/F: assinale V, se verdadeiro; F, se falso; ou deixe em branco (sem marcas).
- 2) Questões numéricas: marque o algarismo da dezena na coluna (D) - mesmo que seja 0 (zero), e o das unidades na coluna (U). Você pode também deixar a questão em branco, sem resposta.

CUIDADO:

O candidato que deixar **toda a prova sem resposta** (em branco), será **desclassificado**. Esta regra somente não é válida para os candidatos que escolheram unicamente o MDE-IE/Unicamp, nas provas de peso zero e para os candidatos ao doutorado na UFPR, na prova de matemática.

INSTRUÇÕES PARA PREENCHIMENTO:

- USE SOMENTE CANETA ESFEROGRÁFICA PRETA OU AZUL PARA MARCAR SUA RESPOSTA.
- LEIA ATENTAMENTE AS INSTRUÇÕES NO CADERNO DE PROVA.
- PREENCHA OS ALVÉOLOS CORRETAMENTE CONFORME EXEMPLO INDICADO A SEGUIR:



- 01 -			
V	F	D	U
0- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		0	0
1- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		1	1
2- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		2	2
3- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		3	3
4- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
		9	9

- 02 -			
V	F	D	U
0- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		0	0
1- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		1	1
2- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		2	2
3- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		3	3
4- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
		9	9

- 03 -			
V	F	D	U
0- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		0	0
1- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		1	1
2- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		2	2
3- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		3	3
4- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
		9	9

- 04 -			
V	F	D	U
0- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		0	0
1- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		1	1
2- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		2	2
3- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		3	3
4- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
		9	9

- 05 -			
V	F	D	U
0- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		0	0
1- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		1	1
2- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		2	2
3- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		3	3
4- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
		9	9

- 06 -			
V	F	D	U
0- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		0	0
1- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		1	1
2- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		2	2
3- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		3	3
4- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
		9	9

- 07 -			
V	F	D	U
0- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		0	0
1- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		1	1
2- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		2	2
3- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		3	3
4- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
		9	9

- 08 -			
V	F	D	U
0- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		0	0
1- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		1	1
2- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		2	2
3- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		3	3
4- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
		9	9

- 09 -			
V	F	D	U
0- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		0	0
1- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		1	1
2- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		2	2
3- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		3	3
4- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
		9	9

- 10 -			
V	F	D	U
0- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		0	0
1- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		1	1
2- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		2	2
3- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		3	3
4- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
		9	9

- 11 -			
V	F	D	U
0- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		0	0
1- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		1	1
2- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		2	2
3- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		3	3
4- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
		9	9

- 12 -			
V	F	D	U
0- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		0	0
1- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		1	1
2- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		2	2
3- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		3	3
4- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
		9	9

- 13 -			
V	F	D	U
0- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		0	0
1- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		1	1
2- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		2	2
3- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		3	3
4- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
		9	9

- 14 -			
V	F	D	U
0- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		0	0
1- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		1	1
2- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		2	2
3- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		3	3
4- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
		9	9

- 15 -			
V	F	D	U
0- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		0	0
1- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		1	1
2- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		2	2
3- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		3	3
4- <input type="radio"/> V <input type="radio"/> F		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
		9	9

RASCUNHO

