anpec
associação nacional de
centros de pós graduação
em economia

EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2022

PROVA DE ESTATÍSTICA:
RESERVA

INSTRUÇÕES

1. Esta **PROVA** é constituída de **quinze** questões objetivas.
2. Nas questões do tipo A, recomenda-se não marcar ao acaso: cada item cuja resposta divirja do gabarito oficial acarretará a perda de $\frac{1}{n}$ ponto, em que *n* é o número de itens da questão a que pertença o item, conforme consta no Manual do Candidato.
3. Durante as provas, o(a) candidato(a) não deverá levantar-se ou comunicar-se com outras pessoas.
4. A duração da prova é de **duas horas**.
5. Durante a realização das provas **não** é permitida a utilização de calculadora, qualquer material de consulta ou equipamentos eletrônicos além do utilizado para realização das provas.
6. Durante a realização das provas somente será permitida a saída do candidato após a autorização, por meio do *chat online*, do fiscal de prova.
7. O candidato só poderá desconectar-se, após o término da prova de cada disciplina.
8. Se a conexão cair, o candidato deve reiniciar a máquina. Caso a conexão não volte após o reinício da máquina, o candidato deve rotear a internet/wi-Fi de alguma pessoa próxima ou entrar em contato com o suporte técnico, cujo contato está no Comprovante de Inscrição.
9. A desobediência a qualquer uma das recomendações constantes nas presentes Instruções poderá implicar a anulação das provas do(a) candidato(a). A desobediência ao fiscal de prova também poderá implicar a anulação da prova do(a) candidato(a).

AGENDA

- 07/10/2021 – 14 horas – Divulgação dos gabaritos das provas objetivas, no endereço: http://www.anpec.org.br.
- 07/10 a 08/10/2021 – Recursos identificados pelo autor serão aceitos até às 14h do dia 08/10 do corrente ano. Não serão aceitos recursos fora do padrão apresentado no Manual do Candidato.
- 05/11/2021 – 14 horas – Divulgação do resultado na Internet, no *site* acima citado.

OBSERVAÇÕES:

- Em nenhuma hipótese a ANPEC informará resultado por telefone.
- É **proibida** a reprodução total ou parcial deste material, por qualquer meio ou processo, sem autorização expressa da ANPEC.
- Nas questões de **1** a **15** (não numéricas), marque, de acordo com o comando de cada uma delas: itens **VERDADEIROS**, marque **V**; itens **FALSOS**, marque **F**; ou deixe a resposta **EM BRANCO (SEM MARCAR)**.

Caso a **resposta seja numérica**, digite entre os números de 00 até 99 o número correspondente à resposta ou deixe a resposta **EM BRANCO (SEM MARCAR)**.

QUESTÃO 01

Seja Y_1 e Y_2 variáveis aleatórias independentes com mesma média, mas variâncias diferentes, $Var[Y_1] = 30\ e\ Var[Y_2] = 10$. Seja μ a média comum destas duas variáveis, $E[Y_1] = E[Y_2] = \mu$. Um possível estimador para μ é

$$\hat{\mu}_w = wY_1 + (1 - w)Y_2$$

onde w é uma constante. Encontre o valor de w que minimiza $Var[\hat{\mu}_w]$. Multiplique o resultado por 100.

QUESTÃO 02

Considere o seguinte modelo de regressão linear:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

onde (y_i, x_i), $i = 1, \ldots n$, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e as seguintes hipóteses são válidas: $E[\varepsilon_i|x_i] = 0$ e $Var[\varepsilon_i|x_i] = \sigma^2$, i=1,...,n. Defina $\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i}{n}$ e assuma que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 > 0$.

Baseado no modelo acima, podemos afirmar:

⓪ O estimador de mínimos quadrados ordinários para β_1 pode ser escrito como, $\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \sum_{i=1}^{n} w_i \, \varepsilon_i$, onde $w_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$.

① O estimador de mínimos quadrados ordinários é não correlacionado com $\bar{\varepsilon}$, isto é, $E\left[\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right)\bar{\varepsilon}\,\right] = 0$.

② A hipótese $E[\varepsilon_i|x_i] = 0$ é necessária para que o estimador de mínimos quadrados ordinários seja $\hat{\beta}_1$ não-viesado.

③ A hipótese $E[\varepsilon_i|x_i] = 0$ é suficiente para que o estimador de mínimos quadrados ordinários seja o mais eficiente entre todos os estimadores lineares não-viesados.

④ A hipótese $Var[\varepsilon_i|x_i] = \sigma^2$ é necessária para que o estimador de mínimos quadrados ordinários seja não-viesado.

QUESTÃO 03

Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade conjunta dada por

	$X=1$	$X=2$
$Y=1$	$1/12$	$1/12$
$Y=2$	$1/4$	$1/6$
$Y=3$	$1/3$	$1/12$

É correto afirmar que:

⓪ A esperança de X é igual a 4/3.

① A variância de X é igual a 2.

② A esperança de X, condicional em Y = 2, é igual a 7/12.

③ X e Y são variáveis aleatórias independentes.

④ X e Y são variáveis aleatórias não correlacionadas.

QUESTÃO 04

Suponha que a distribuição conjunta de X e Y é dada por:

$$f_{X,Y} = \begin{cases} kx^3y & 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

Encontre o valor de k.

QUESTÃO 05

Um pesquisador está interessado em estimar a relação entre duas variáveis Y e X. Considere as seguintes especificações alternativas:

$$Y = \beta_0 D_1 + \beta_1 D_2 + u \qquad (1)$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 D_1 + u \qquad (2)$$

$$Y = \beta_1 X + \beta_2 D_1 + \beta_3 D_2 + u \qquad (3)$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 D_1 + \beta_3 D_2 + u \qquad (4)$$

em que D_1 é uma variável dummy que assume o valor 1 se o indivíduo pertencer ao sexo masculino e 0 caso contrário e D_2 é uma variável dummy que assume o valor 1 se o indivíduo for do sexo feminino e 0 caso contrário.

Julgue as afirmativas:

⓪ As equações (2) e (3) são equivalentes.

① O R^2 da equação (2) será idêntico ao R^2 da equação (3).

② A especificação (4) dará origem ao problema conhecido como multicolinearidade.

③ Se a especificação (1) for correta e omitirmos a variável D_2 da regressão, o estimador de mínimos quadrados ordinários de β_0 será viesado.

④ Se a especificação (3) for correta e omitirmos a variável D_2 da regressão, considerando que esta não é ortogonal a X, o estimador de mínimos quadrados ordinários de β_1 será viesado.

QUESTÃO 06

Suponha que X seja uma variável aleatória que possui distribuição normal(1,9) e que Y seja uma variável aleatória com distribuição normal(2,4). Julgue as proposições:

[Para a resolução desta questão talvez lhe seja útil saber que se Z tem distribuição normal padrão, então P(|Z|>1,28)=0,20; P(|Z|>1,645)=0,10 e P(|Z|>1,96)=0,05]

⓪ $P(X \geq 4) < 10\%$

① $P(0 \leq Y \leq 1) > 20\%$

② $P(Y \geq 6) < 5\%$

③ Se W= 2Y+1, então $P(W \geq 8) > 10\%$

④ Se X e Y tem uma distribuição normal conjunta e Cov(X,Y)=0, então X e Y são independentes.

QUESTÃO 07

Sejam Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 e Y_5 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de uma população com média μ e variância σ². A média dessas 5 variáveis aleatórias é dada por $\overline{Y} = \frac{1}{5}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5)$

É correto afirmar:

⓪ $\overline{Y}$ é um estimador não viesado para μ.

① $S_1^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(Y_i - \overline{Y})^2$ é um estimador não viesado de σ^2.

② Se μ é conhecido, $S_2^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(Y_i - \mu)^2$ é um estimador não viesado de σ^2.

③ Var($\overline{Y}$)=$\frac{\sigma^2}{\sqrt{5}}$.

④ Seja $W = \left(\frac{1}{10}Y_1 + \frac{3}{10}Y_2 + \frac{1}{10}Y_3 + \frac{3}{10}Y_4 + \frac{2}{5}Y_5\right)$. Podemos dizer que W é um estimador não viesado para μ.

QUESTÃO 08

Uma amostra de 200 observações de uma determinada firma fornece os seguintes resultados para os gerentes e os empregados na produção dessa firma:

	Média dos Salários	Observações
Gerentes	80	50
Empregados na produção	20	150

Considere que foi obtido a partir da seguinte equação:

$sal_i = \beta_0 + \beta_1 Gerente_i + u_i,$

Onde sal_i é o salário do indivíduo i e $Gerente_i$ é uma variável dummy igual a um caso o indivíduo i seja um gerente e igual a zero caso seja empregado na produção. A equação acima foi estimada pelo método de Mínimos Quadrados Ordinários, obtenha o coeficiente estimado para a variável *dummy* Gerente (β_1).

QUESTÃO 09

Um experimento médico sujeita um paciente a um certo estímulo e reporta se o paciente respondeu ou não ao estímulo. A probabilidade de que o paciente responda é 0,2. Assuma que as reações dos pacientes ao estímulo sejam independentes entre si.
Julgue as afirmativas:

⓪ A probabilidade de que exatamente um dentre três pacientes responda ao estímulo é 0,384.

① A probabilidade de que pelo menos um dentre três pacientes responda ao estímulo é 0,488.

② A probabilidade de que em 3 experimentos nenhum paciente responda ao estímulo é 0,512.

③ A probabilidade de que exatamente um paciente responda ao estímulo em dois experimentos, dado que nos primeiros 3 experimentos anteriores nenhum paciente respondeu, é 0,16.

④ Suponha que dentre 10 pacientes submetidos ao experimento, 3 responderam ao estímulo. Entre estes 10 pacientes, a probabilidade de selecionar aleatoriamente, sem reposição, 2 pacientes que não responderam ao estímulo é 7/15.

QUESTÃO 10

Uma variável aleatória X tem a seguinte função densidade de probabilidade,

$$f(x) = \begin{cases} cx & se \quad 0 \leq x \leq 1 \\ c & se \quad 1 < x \leq 2 \\ c(3-x) & se \quad 2 < x \leq 3 \\ 0 & caso\,contrário \end{cases}$$

Julgue as seguintes afirmativas.

⓪ O valor de c é $\frac{1}{4}$.

① E[X]=1

② Var[X] é menor que 1.

③ $E[X^2]= \frac{8}{3}$

④ A variável aleatória X não possui uma função de distribuição acumulada.

QUESTÃO 11

Considere o seguinte sistema de equações lineares de oferta e demanda de trabalho das mulheres casadas. Neste sistema, as duas variáveis endógenas, salário (P) e quantidade de horas trabalhadas (Q) são determinados pela educação (X_1), idade (X_2), número de filhos (X_3) e dois termos não-observáveis (ε_{1i} , ε_{2i}). Demanda: $Q_i = \alpha_1 P_i + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_3 X_{3i} + \varepsilon_{1i}$

Oferta: $P_i = \alpha_4 Q_i + \alpha_5 X_{1i} + \alpha_6 X_{2i} + \varepsilon_{2i}$

Temos uma amostra aleatória de N mulheres, (Q_i, P_i, X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}), i=1,...,N. Vamos assumir que a matriz X=[X_1, X_2, X_3] tem posto completo. **Julgue as seguintes afirmativas:**

⓪ O sistema na forma reduzida pode ser escrito como: $Q_i = \pi_1 P_i + \pi_2 X_{2i} + \pi_3 X_{3i} + u_{1i}$

$$P_i = \pi_4 Q_i + \pi_5 X_{1i} + \pi_6 X_{3i} + u_{2i}$$

onde $\pi_1 = \alpha_1$, $\pi_2 = \dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_1\alpha_4}$, $\pi_3 = \dfrac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3}{1-\alpha_1\alpha_4}$, $\pi_4 = \alpha_4$, $\pi_5 = \dfrac{\alpha_5}{1-\alpha_1\alpha_4}$, $\pi_6 = \dfrac{\alpha_4\alpha_3 + \alpha_6}{1-\alpha_1\alpha_4}$.

① Podemos escrever a curva de oferta na sua forma reduzida, como: $P_i = \phi_1 X_{1i} + \phi_2 X_{2i} + \phi_3 X_{3i} + \vartheta_{2i}$

onde $\phi_1 = \dfrac{\alpha_5}{1-\alpha_4\alpha_1}$, $\phi_2 = \dfrac{\alpha_2\alpha_4 + \alpha_6}{1-\alpha_4\alpha_1}$, $\phi_3 = \dfrac{\alpha_3\alpha_4}{1-\alpha_4\alpha_1}$ e $\vartheta_{2i} = \alpha_4\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}$ .Se assumirmos que $E[\varepsilon_{1i} | X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}] = 0$ e $E[\varepsilon_{2i} | X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}] = 0$, o estimador de mínimos quadrados ordinários para ϕ_2 será um estimador consistente.

② Considerando somente a equação de oferta em sua forma reduzida, podemos obter $\hat{\alpha}_5$ em função somente de $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$ e $\hat{\phi}_3$.

③ Assumindo que $E[\varepsilon_{1i} | X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}] = 0$ e $E[\varepsilon_{2i} | X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}] = 0$, estimamos o sistema abaixo por mínimos quadrados ordinários aplicados equação por equação, isto é, estimamos separadamente a equação de oferta e a equação de demanda por mínimos quadrados.

$$P_i = \phi_1 X_{1i} + \phi_2 X_{2i} + \phi_3 X_{3i} + \vartheta_{2i}$$

$$Q_i = \phi_4 X_{1i} + \phi_5 X_{2i} + \phi_6 X_{3i} + \vartheta_{1i}$$

onde $\phi_1 = \dfrac{\alpha_5}{1-\alpha_4\alpha_1}$, $\phi_2 = \dfrac{\alpha_2\alpha_4 + \alpha_6}{1-\alpha_4\alpha_1}$, $\phi_3 = \dfrac{\alpha_3\alpha_4}{1-\alpha_4\alpha_1}$, $\phi_4 = \dfrac{\alpha_1\alpha_5}{1-\alpha_4\alpha_1}$, $\phi_5 = \dfrac{\alpha_1\alpha_6 + \alpha_2}{1-\alpha_4\alpha_1}$, $\phi_6 = \dfrac{\alpha_3}{1-\alpha_4\alpha_1}$,

$\vartheta_{2i} = \alpha_4\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}$ e $\vartheta_{1i} = \varepsilon_{1i} + \alpha_1\varepsilon_{2i}$.

O estimador de mínimos quadrados para ϕ_5 será não-viesado.

④ Usando os estimadores de mínimos quadrados ordinários para o sistema de equações do item (3), podemos obter $\hat{\alpha}_5$ em função somente de $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3, \hat{\phi}_4, \hat{\phi}_5$ e $\hat{\phi}_6$.

QUESTÃO 12

Considere o seguinte média móvel de ordem 2, MA (2)

$$Y_t = 14 + \varepsilon_t + 0{,}5\varepsilon_{t-1} - 0{,}2\varepsilon_{t-2}$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{i=1}^{T}$ são i.id com média 0 e variância um.

Encontre Cov[Y_t, Y_{t-1}]. Multiplique o resultado por 100.

QUESTÃO 13

Considere o seguinte processo estocástico:

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \beta_1 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

no qual ε_t é um ruído branco com média zero e variância 1.

⓪ Neste caso, o processo Y_t segue um modelo autoregressivo de ordem 2.

① A partir do modelo acima, obtemos a seguinte expressão para o processo Y_t,

$$Y_t = \beta_0 + (1 + \beta_1) Y_{t-1} + \beta_1 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

② Se ΔY_t segue um processo fracamente estacionário, sua média será dada por

$$E[\Delta Y_t] = \beta_0$$

③ Se ΔY_t segue um processo fracamente estacionário, sua variância será zero.

④ Se ΔY_t segue um processo fracamente estacionário, então Y_t também segue um processo fracamente estacionário.

QUESTÃO 14

Considere o modelo de regressão linear simples: $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$, onde $E(u/x) = 0$ e $Var(u/x) = \sigma^2$.

Para uma amostra de 50 observações, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 50,\ \sum_{i=1}^{50} y_i = 300,\ \sum_{i=1}^{50} x_i y_i = 400,\ \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 60, \text{ e } \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 5200$$

Defina b_0 como o estimador de Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) para β_0 e b_1 como o estimador de Mínimos Quadrados Ordinários para β_1. Com base nos resultados acima, é correto afirmar:

⓪ $b_1 = 8$

① $b_0 = -2$

② Seja $\hat{Var}(b_1 / x)$ um estimador não viesado para $Var(b_1 / x)$. Usando as informações da amostra, obtemos $\hat{Var}(b_1 / x) = 5$.

③ R^2 da regressão estimada por MQO de y em x e uma constante é maior do que 0,5.

④ $\sum_{i=1}^{50} \left(b_0 + b_1 x_i - \bar{y}\right)^2 = 200$

QUESTÃO 15

São corretas as afirmativas:

⓪ Seja W_n um estimador de γ baseado em uma amostra Y_1, Y_2, ..., Y_n de tamanho n. Então, dizemos que W_n é um estimador consistente de γ se para todo $\varepsilon>0$, temos:
$P(|W_n - \gamma|)>\varepsilon) \to 0$ quando $n\to\infty$.

① Se X é uma variável aleatória com média um e variância 5, pela desigualdade de Tchebychev, $P(|X-2|\geq 5)\leq 0{,}5$.

② Se Z é uma variável aleatória, c é uma constante qualquer, e d é uma constante positiva, então, pela desigualdade de Tchebychev, $P(|Z-c|\geq d)\leq E\left(Z^2\right)/d^2$.

③ Sejam Y_1, Y_2,.....,Y_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ. Sendo $\overline{Y}=\sum_{i=1}^{n} Y_i/n$, pela Lei dos Grandes Números, à medida que $n\to\infty$, $\overline{Y}$ converge para μ.

④ Sejam X_1, X_2,.....,X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2. Sendo $\overline{X}=\sum_{i=1}^{n} X_i/n$, pelo Teorema Central do Limite, à medida que $n\to\infty$, a distribuição de $\dfrac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ se torna bem aproximada pela distribuição normal padrão.